

JAIR MENDES MARQUES

# **Análise Estatística das Discrepâncias Parciais de uma Rede de Nivelamento de 1.<sup>a</sup> Ordem**

Dissertação apresentada ao Curso de  
Pós-Graduação em Ciências Geodésicas  
para obtenção do Grau de Mestre em  
Ciências pela Universidade Federal do  
Paraná.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

1982

ANÁLISE ESTATÍSTICA DAS DISCREPÂNCIAS  
PARCIAIS DE UMA REDE DE NIVELAMENTO DE 1ª ORDEM

DISSERTAÇÃO

Apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências  
Geodésicas para obtenção do Grau de Mestre em  
Ciências pela Universidade Federal do Paraná

Por

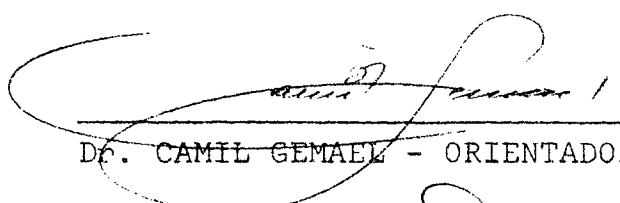
JAIR MENDES MARQUES, Licenciado em Matemática

\*\*\*\*\*

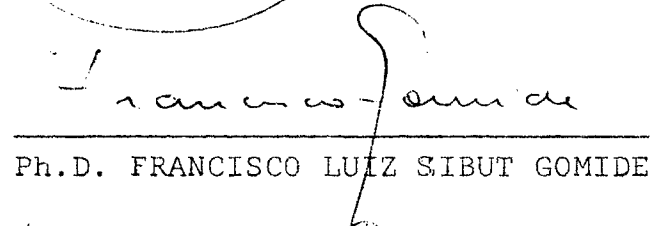
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

1982

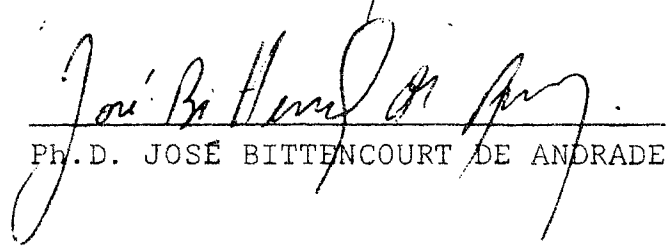
BANCA EXAMINADORA:



DR. CAMIL GEMAELE - ORIENTADOR



Ph.D. FRANCISCO LUIZ SIBUT GOMIDE



Ph.D. JOSÉ BITTENCOURT DE ANDRADE

## AGRADECIMENTOS

Desejamos externar nossos profundos agradecimentos aos professores:

Dr. Camil Gemaël

Dr. Francisco Luiz Sibut Gomide

respectivamente, orientador e co-orientador do presente trabalho, bem como às pessoas e instituições abaixo relacionadas, que contribuíram de forma relevante em várias etapas da confecção do mesmo:

Angelo Pavan, Eng. Cart.

Anselmo Chaves Neto, Eng. Civil, Lic. Matemática

Eliane Stroparo, Lic. Filos., Bel Bibliotecon.

Fernando Fiuza

IBGE

João Carlos Loyola Pires, Lic. Matemática

José Bittencourt de Andrade, PhD

Sérgio Ricardo Schneider, Eng. Civil, Lic. Matemática

UFPr

## SINOPSE

Foi realizada uma análise estatística das discrepâncias parciais em uma malha constituída de cinco circuitos da rede de nivelamento brasileira de 1<sup>a</sup> ordem, com uma extensão total de 1915,87 km e 648 seções.

Foram utilizados, em geral, métodos não-paramétricos. O computador empregado foi o DEC System 10.

## ABSTRACT

It was made a statistical analysis of discrepancies in part of the Brazilian net of high precision levelling with five circuits and a total length of about 1,915.87 km and 648 sections.

The methods of analysis employed were in general nonparametric. The computer employed was DEC System 10.

## SUMÁRIO

	Página
Título.....	ii
Agradecimentos.....	iii
Sinopse.....	iv
Abstract.....	iv
Sumário .....	v
Lista dos principais símbolos e abreviaturas..	xiii
Introdução.....	xvii

## CAPÍTULO 1

### ELEMENTOS DE ESTATÍSTICA DESCRITIVA

1.1	Representação de dados observados.....	01
1.2	Medidas de posição .....	05
1.3	Medidas de dispersão.....	07

## CAPÍTULO 2

### DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS DE PROBABILIDADES

2.1	Variável aleatória.....	09
2.2	Variável aleatória contínua.....	09
2.3	Função de distribuição.....	09
2.3.1	Definição.....	09
2.3.2	Propriedades.....	10
2.4	Função densidade de probabilidade.....	10
2.4.1	Conceito.....	10
2.4.2	Propriedades.....	11
2.5	Parâmetros da distribuição.....	11
2.5.1	Medidas de posição.....	11

	Página
2.5.1.1 Média, esperança matemática ou valor esperado	12
2.5.1.2 Mediana.....	13
2.5.2 Medidas de dispersão.....	13
2.5.2.1 Variância.....	13
2.5.2.2 Desvio padrão.....	14
2.5.2.3 Coeficiente de variação.....	15
2.5.3 Coeficiente de correlação linear.....	15
2.6 Modelos teóricos de distribuições de variável contínua.....	16
2.6.1 Distribuição normal (ou de Gauss).....	16
2.6.1.1 Definição.....	16
2.6.1.2 Propriedades.....	17
2.6.1.3 Função distribuição.....	18
2.6.1.4 Curva normal padronizada.....	18
2.6.1.5 Teorema do limite central.....	19
2.6.2 Distribuição gama.....	19
2.6.2.1 Definição.....	19
2.6.2.2 Função gama.....	19
2.6.3 Distribuição de qui-quadrado.....	20
2.6.3.1 Teorema.....	20
2.6.3.2 Propriedade da aditividade de $\chi^2$ .....	22
2.6.4 Distribuição t de Student.....	22
2.6.4.1 Teorema.....	22
2.6.4.2 Propriedade da distribuição t de Student.....	24
2.6.5 Distribuição F de Snedecor.....	24
2.6.5.1 Teorema.....	24
2.6.5.2 Propriedade da razão $s_1^2 / s_2^2$ .....	26

CAPÍTULO 3

ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

3.1	Introdução.....	27
3.2	Estimador.....	27
3.3	Estimativa.....	27
3.4	Principais qualidades de um estimador.....	28
3.4.1	Estimador não tendencioso (ou justo, ou sem viés, ou sem viés).....	28
3.4.2	Estimador consistente (ou coerente).....	28
3.4.3	Estimador eficiente.....	29
3.5	Estimador de máxima verossimilhança.....	30
3.6	Estimação por pontos.....	31
3.7	Estimação por intervalos.....	31
3.7.1	Introdução.....	31
3.7.2	Intervalo de confiança para a média $\mu$ da população.....	32
3.7.2.1	Quando o desvio padrão populacional $\sigma$ for conhecido.....	32
3.7.2.2	Quando o desvio padrão populacional $\sigma$ for desconhecido.....	33
3.7.3	Intervalo de confiança para a diferença entre as médias populacionais $\mu_1$ e $\mu_2$ .....	34
3.7.3.1	Quando as variâncias populacionais $\sigma_1^2$ e $\sigma_2^2$ forem conhecidas.....	34
3.7.3.2	Quando as variâncias populacionais $\sigma_1^2$ e $\sigma_2^2$ forem desconhecidas e supostamente iguais.....	35
3.7.3.3	Quando as variâncias populacionais $\sigma_1^2$ e $\sigma_2^2$ forem desconhecidas e supostamente diferentes....	36

		Página
3.7.4	Intervalo de confiança para a variância populacional $\sigma^2$ .....	37
3.7.5	Intervalo de confiança para o quociente entre duas variâncias populacionais $\sigma_1^2$ e $\sigma_2^2$ .....	39

## CAPÍTULO 4

### TESTES DE HIPÓTESES

4.1	Definições.....	41
4.1.1	Hipóteses estatísticas.....	41
4.1.2	Hipóteses nula e alternativa.....	41
4.1.3	Regiões de aceitação e rejeição da hipótese...	41
4.1.4	Erros dos tipos I e II .....	42
4.1.5	Nível de significância.....	42
4.1.6	Função característica.....	42
4.1.7	Função do poder .....	42
4.1.8	Testes unilateral e bilateral.....	43
4.1.9	Curva característica de operação (C.C.O.).....	43
4.2	Esquema geral de um teste.....	43
4.3	Teste para a média populacional.....	44
4.4	Teste para a diferença entre duas médias populacionais $\mu_1$ e $\mu_2$ .....	45
4.5	Teste para a variância populacional $\sigma^2$ .....	50
4.6	Teste para a igualdade de duas variâncias populacionais $\sigma_1^2$ e $\sigma_2^2$ .....	51
4.7	Teste para a igualdade de k ( $k > 2$ ) variâncias populacionais $\sigma_1^2$ , $\sigma_2^2$ , ..., $\sigma_k^2$ .....	53



## CAPÍTULO 5

## COMPARAÇÃO DE VÁRIAS MÉDIAS

5.1	Introdução.....	55
5.2	Soma de quadrados.....	55
5.2.1	Esquema do modelo.....	56
5.2.2	Soma de quadrados dentro das amostras (ou residual).....	56
5.2.3	Soma de quadrados entre amostras.....	57
5.2.4	Soma total de quadrados.....	57
5.3	Quadrado médio (ou média quadrática) .....	57
5.4	Teste de hipóteses para a igualdade de k médias ( $k > 2$ ) .....	58

## CAPÍTULO 6

## ESTATÍSTICA NÃO-PARAMÉTRICA

6.1	Métodos não-paramétricos.....	61
6.2	Testes não-paramétricos.....	61
6.3	Descrição de alguns testes não-paramétricos...	61
6.3.1	Testes de aleatoriedade.....	61
6.3.1.1	Teste de iterações.....	62
6.3.1.2	Teste de tendência (teste de estacionalidade).	64
6.3.2	Teste de normalidade.....	65
6.3.2.1	Teste de qui-quadrado.....	66
6.3.2.2	Teste de Kolmogorov-Smirnov.....	66

		Página
6.3.3	Teste de Wilcoxon.....	68
6.3.4	Teste $P_{\lambda}$ de Pearson .....	70
6.3.5	Teste de Kruskal-Wallis.....	71

## CAPÍTULO 7

### ESCOLHA DA VARIÁVEL ALEATÓRIA E A REDE DE NIVELAMENTO BRASILEIRO DE 1ª ORDEM

7.1	Introdução.....	73
7.2	A variável aleatória $X_{ij}$ .....	73
7.3	A rede de nivelamento brasileira de 1ª ordem..	74
7.3.1	Generalidades.....	74
7.3.2	Descrição da rede parcial.....	75
7.4	Métodos de análise.....	81

## CAPÍTULO 8

### APLICAÇÕES DOS TESTES DE ALEATORIEDADE

8.1	Introdução.....	82
8.2	Teste de iterações.....	82
8.2.1	Generalidades.....	82
8.2.2	Resumo dos resultados.....	83
8.3	Teste de tendência (teste de estacionalidade)..	85
8.3.1	Generalidades.....	85
8.3.2	Resumo dos resultados.....	85
8.4	Análise dos resultados.....	87

## CAPÍTULO 9

### APLICAÇÕES DOS TESTES DE NORMALIDADE

9.1	Introdução.....	89
9.2	Teste de $\chi^2$ .....	89
9.2.1	Generalidades.....	89
9.2.2	Resumo dos resultados.....	90
9.3	Teste de Kolmogorov-Smirnov.....	92
9.3.1	Generalidades.....	92
9.3.2	Resumo dos resultados.....	92
9.4	Análise dos resultados.....	92

## CAPÍTULO 10

### APLICAÇÕES DOS TESTES DE NULIDADE DA MÉDIA

10.1	Introdução.....	95
10.2	Teste t de Student.....	95
10.2.1	Generalidades.....	95
10.2.2	Resumo dos resultados.....	96
10.3	Teste de Wilcoxon.....	96
10.3.1	Generalidades.....	96
10.3.2	Resumo dos resultados.....	96
10.4	Análise dos resultados.....	97

## CAPÍTULO 11

### APLICAÇÕES DO TESTE $P_\lambda$ DE PEARSON

11.1	Introdução.....	100
------	-----------------	-----

		Página
11.2	Aplicações aos testes de aleatoriedade.....	100
11.3	Aplicações aos testes de nulidade da média...	100
11.4	Análise dos resultados.....	100

## CAPÍTULO 12

### APLICAÇÃO DO TESTE DE KRUSKALL-WALLIS

12.1	Introdução.....	105
12.2	Resumo dos resultados.....	105
12.3	Análise dos resultados.....	105

## CAPÍTULO 13

### APLICAÇÃO DO TESTE DE BARTLETT

13.1	Introdução.....	107
13.2	Resumo dos resultados.....	107
13.3	Análise dos resultados.....	107
	Conclusões.....	109

## APÊNDICE

	Programas (FORTRAN) utilizados nos testes....	112
	NOTAS DE REFERÊNCIAS.....	147
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	152

## LISTA DOS PRINCIPAIS SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

B	- tendenciosidade; estatística do teste de Bartlett .
C.C.O.	- curva característica de operação
$\text{cov}[X,Y]$	- covariância entre as variáveis aleatórias X e Y.
cv	- coeficiente de variação amostral.
CV	- coeficiente de variação de uma variável aleatória.
d	- desvio máximo para o teste de Kolmogorov-Smirnov.
$d_0$	- diferença entre duas médias populacionais.
EMV	- estimador de máxima verossimilhança.
E [X]	- média, esperança matemática ou valor esperado na variável aleatória X.
F	- estatística da distribuição F de Snedecor.
$f(x)$	- função densidade da variável aleatória X.
$f_X(u)$	- função densidade da variável aleatória X.
$F(x)$	- função de distribuição de uma variável aleatória X, no ponto x.
$F_X(x)$	- função de distribuição de uma variável aleatória X, no ponto x.
$\tilde{F}_X(x)$	- função de distribuição amostral da variável aleatória X, no ponto x.
GL	- graus de liberdade
H	- estatística do teste de Kruskal-Wallis.
$H_0$	- hipótese nula ou básica.
$H_1$	- hipótese alternativa.
k	- número de classes de uma distribuição de frequência; número de amostras.
$L(\theta)$	- função de verossimilhança considerada como função do parâmetro $\theta$ .
Me	- mediana.

$m_i$	- mediana da i-ésima linha
$n$	- frequência total; tamanho de uma amostra.
$n_i$	- tamanho da i-ésima amostra.
$N$	- número total de observações; frequência total.
$N_i$	- frequência observada da i-ésima classe.
$np_i$	- frequência esperada da i-ésima classe.
$p_i$	- probabilidade da i-ésima classe.
$P_\lambda$	- estatística do teste $P_\lambda$ de Pearson.
QME	- quadrado médio ou média quadrática entre amostras.
QMR	- quadrado médio ou média quadrática residual.
$r$	- número de iterações.
$r_i$	- número de iterações da i-ésima linha.
$R_{ij}$	- afastamento, em km, entre duas RNs consecutivas da j-ésima seção e i-ésima linha.
R.C.	- região crítica ou região de rejeição.
RN	- referência de nível.
R.R.	- região de rejeição ou região crítica.
$s$	- desvio padrão amostral; estimativa do desvio padrão populacional.
$S$	- estimador do desvio padrão populacional.
$s^2$	- variância amostral; estimativa da variância populacional.
$S^2$	- estimador da variância populacional.
$s_p^2$	- variância amostral agrupada.
SQE	- soma dos quadrados entre amostras.
SQR	- soma dos quadrados dentro das amostras ou residual.
SQT	- soma total de quadrados.
$t$	- estatística da distribuição $t$ de Student.

$t_j$	- número de coincidências entre valores amostrais.
$u_R$	- erro provável bruto por quilômetro.
$V[X]$	- variância da variável aleatória $X$ .
$\bar{x}$	- média amostral; estimativa da média populacional.
$\bar{X}$	- estimador da média populacional.
$X_{ij}$	- variável aleatória relativa à $j$ -ésima seção e $i$ -ésima linha.
$Z$	- variável padronizada ou reduzida para a distribuição normal ou de Gauss.
$z$	- estatística correspondente à distribuição normal padronizada.
$z_r$	- estatística normal padronizada $z$ para o teste de iteração.
$z_s$	- estatística normal padronizada $z$ para o teste de Wilcoxon.
$z_\eta$	- estatística normal padronizada $z$ para o teste de tendência.
$\alpha$	- nível de significância.
$\beta$	- função característica.
$\Gamma(r)$	- função gama com parâmetro $r$ .
$\eta$	- estatística do teste de tendência.
$\theta$	- parâmetro populacional genérico.
$\hat{\theta}$	- estimador do parâmetro populacional $\theta$ .
$\mu$	- média de uma população.
$\mu_X$	- média, esperança matemática ou valor esperado de uma variável aleatória $X$ .
$v$	- número de graus de liberdade.
$\pi$	- função do poder.
$\rho$	- discrepância parcial em mm.

$\rho(X,Y)$	- coeficiente de correlação linear entre as variáveis X e Y.
$\sigma$	- desvio padrão populacional
$\sigma^2$	- variância populacional.
$\sigma_X$	- desvio padrão de uma variável aleatória X.
$\sigma_X^2$	- variância de uma variável aleatória X.
$\Phi(z)$	- função de distribuição da variável padronizada normal Z.
$\chi^2$	- estatística da distribuição de qui-quadrado.
$\approx$	- aproximadamente.



## INTRODUÇÃO

Neste trabalho, foi realizado um estudo sobre o comportamento estatístico da variável aleatória  $X_{ij} = \rho_{ij} / \sqrt{R_{ij}}$  (onde  $\rho_{ij}$  representa a discrepância parcial em mm entre os resultados dos nivelamentos de ida e volta de uma seção e  $R_{ij}$  o afastamento entre duas RN consecutivas da  $j$ -ésima seção e  $i$ -ésima linha) em uma malha constituída de cinco circuitos da rede de nivelamento brasileira de 1ª ordem. A conveniência em estudar essa variável aleatória reside no fato dela estar diretamente relacionada com o erro provável bruto por quilômetro, da teoria clássica, daí sua importância no ajustamento de uma rede de nivelamento.

Foram aplicados testes individuais para as linhas de nivelamento, bem como, testes envolvendo todo o conjunto de observações.

Os métodos de análise empregados foram, em geral, não paramétricos; sendo aplicados testes de aleatoriedade (testes de iteração e tendência), testes de normalidade (testes de qui-quadrado e Kolmogorov-Smirnov), testes de nulidade da média (testes de Wilcoxon e t de Student), teste para a igualdade de variância (teste de Bartlett), teste para igualdade de distribuições (teste de Kruskal-Wallis) e o teste  $P_\lambda$  de Pearson. A vantagem da aplicação de testes não-paramétricos é devida à generalidade dos mesmos, pois, podem ser aplicados a diferentes distribuições. Em alguns casos, foram aplicados testes paramétricos.

Devido o grande volume de cálculo, os testes foram realizados utilizando-se do computador DEC System 10. As listas de todos os programas utilizados nas aplicações desses testes aparecem no apêndice.

As observações (discrepâncias parciais em mm e comprimento das seções em km) e croquis de cada circuito foram fornecidos pelo IBGE. Um circuito completo foi anexado ao capítulo 7, estando os demais dados gravados em fita magnética.

Os resumos dos resultados de cada teste aplicado são mostrados e analisados, sendo que os resultados completos poderão ser obtidos através dos programas constantes no apêndice .

## CAPÍTULO 1

### ELEMENTOS DE ESTATÍSTICA DESCRITIVA

#### 1.1 Representação de dados observados

Uma das formas de sintetizar a informação contida em dados observados é por meio de tabelas e gráficos. A fim de apresentar as representações mais usuais de variáveis contínuas, considere-se as discrepâncias parciais (em mm) da linha de nivelamento de 1ª ordem (brasileira) Estaca Zero - Regeneração - Amarante, indicadas no quadro 1.1.

-0,1	2,6	-1,1	-0,9	-2,0	-3,0	0,2	-0,8	-3,0	1,1
-1,7	1,6	3,8	1,8	2,7	0,5	3,5	3,6	2,3	0,9
-4,8	5,9	1,5	-3,7	-0,2	-3,0	3,4	-1,6	2,2	1,7
-1,2	-0,9	-1,2	5,0	1,0	2,5	4,9	2,0	5,8	0,1
-3,7	1,6	-0,5	1,8	-1,1	4,2	0,0	-6,1	-2,7	-6,7
-2,5	1,4	3,1	3,7	-3,6	-5,2	5,8	0,8	-2,5	-0,5

Quadro 1.1

Como estes dados estão registrados em ordem cronológica, eles fornecem pouca informação sobre o fenômeno. Sendo apresentados em ordem crescente, como no quadro 1.2, mostram que a discrepância parcial varia entre -6,7 e 5,9.

Grupando os dados em classes como no quadro 1.3, nota-se que a maior concentração se apresenta nas classes centrais, decrescendo à medida que se aproxima dos extremos. O número

de observações em cada classe denomina-se frequência de classe, sendo esta tabela designada distribuição ou tabela de frequências.

As informações fornecidas pelas tabelas de frequências também podem ser obtidas através do histograma de frequências. O histograma de frequências é uma representação gráfica onde

-6,7	-6,1	-5,2	-4,8	-3,7	-3,7	-3,6	-3,0	-3,0	-3,0
-2,7	-2,5	-2,5	-2,0	-1,7	-1,6	-1,2	-1,2	-1,1	-1,1
-0,9	-0,9	-0,8	-0,5	-0,5	-0,2	-0,1	0,0	0,1	0,2
0,5	0,8	0,9	1,0	1,1	1,4	1,5	1,6	1,6	1,7
1,8	1,8	2,0	2,2	2,3	2,5	2,6	2,7	3,1	3,4
3,5	3,6	3,7	3,8	4,2	4,9	5,0	5,8	5,8	5,9

Quadro 1.2

cada classe é representada por um retângulo, cuja base é igual à amplitude da classe correspondente, e a área é proporcional à frequência da classe.

Discrepâncias parciais (em mm)	Frequências
-6,7 + -4,9	3
-4,9 + -3,1	4
-3,1 + -1,3	9
-1,3 + 0,5	14
0,5 + 2,3	14
2,3 + 4,1	10
4,1 + 5,9	6

Quadro 1.3

Na figura 1.1 está representado o histograma correspondente ao quadro 1.3 .

Outra representação gráfica da tabela de frequência é o polígono de frequências, obtido unindo-se por segmentos de retas os pontos médios das bases superiores dos retângulos do histograma.

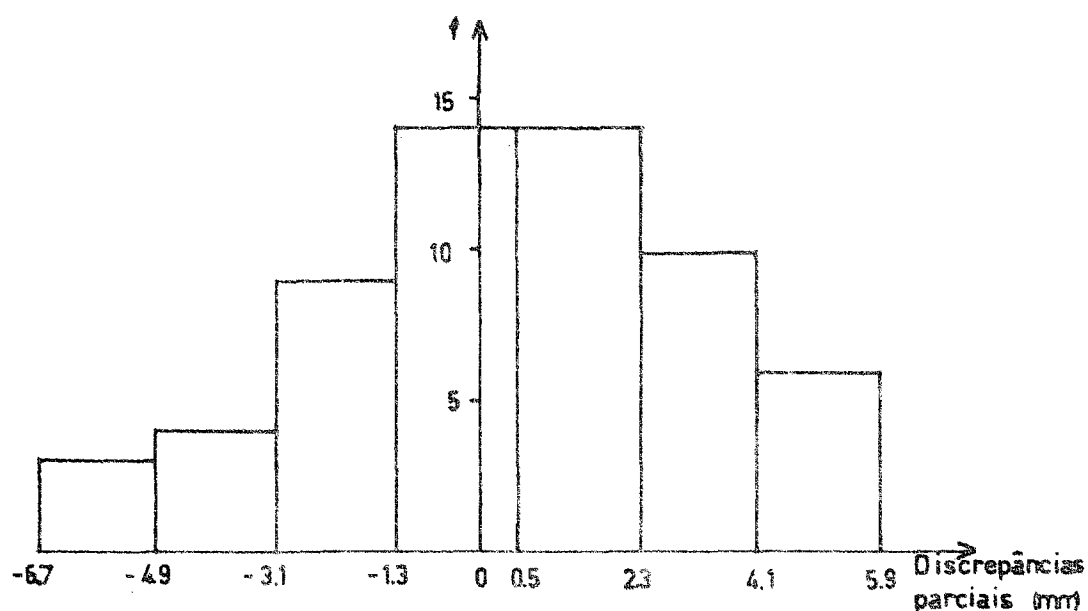
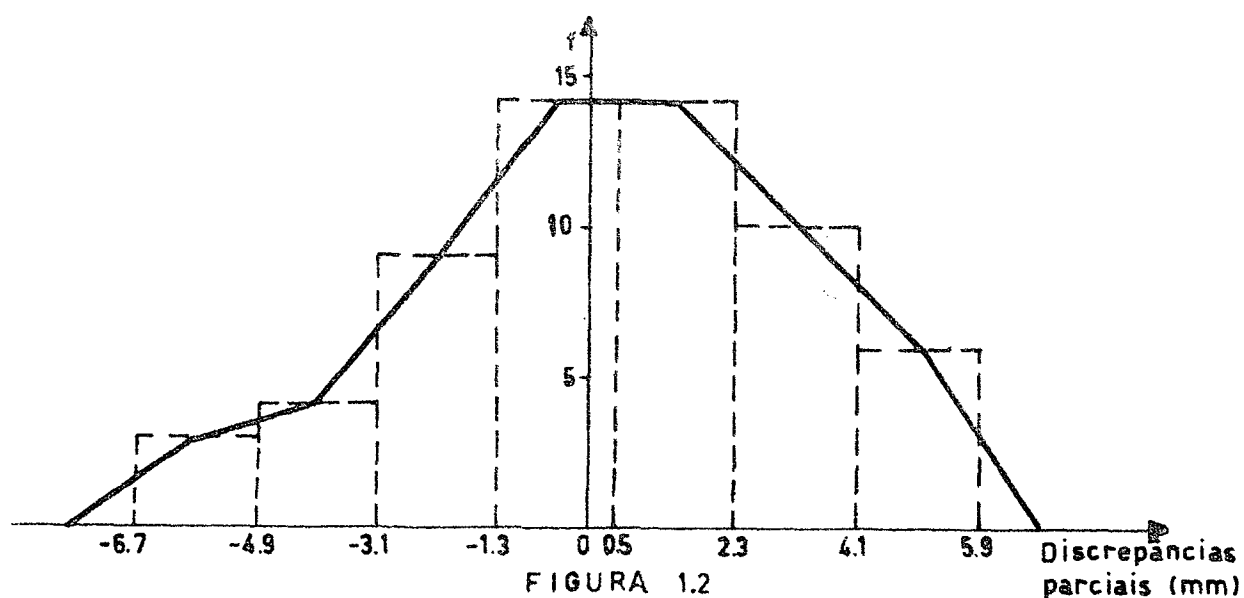


FIGURA 1.1

Uma outra representação dos dados observados é a tabela de frequências acumuladas. A frequência acumulada  $fa_j$  de uma classe  $j$  é dada pelo somatório das frequências desde a primeira até a  $j$ -ésima classe, ou seja

$$fa_j = \sum_{i=1}^j f_i \quad (1.1)$$



O quadro 1.4 representa a distribuição de freqüências acumuladas correspondente à distribuição de freqüências 1.3 .

Uma representação gráfica da tabela de freqüências acumuladas é o polígono de freqüências acumuladas, que é construído

Discrepâncias parciais (em mm)	Freqüências acumuladas
-6,7    -4,9	3
-4,9    -3,1	7
-3,1    -1,3	16
-1,3    0,5	30
0,5    2,3	44
2,3    4,1	54
4,1    5,9	60

Quadro 1.4

marcando-se em abcissas os valores da variável (limites das classes) e em ordenadas as frequências acumuladas correspondentes. A figura 1.3 representa o polígono de frequências acumuladas para o quadro 1.4 .

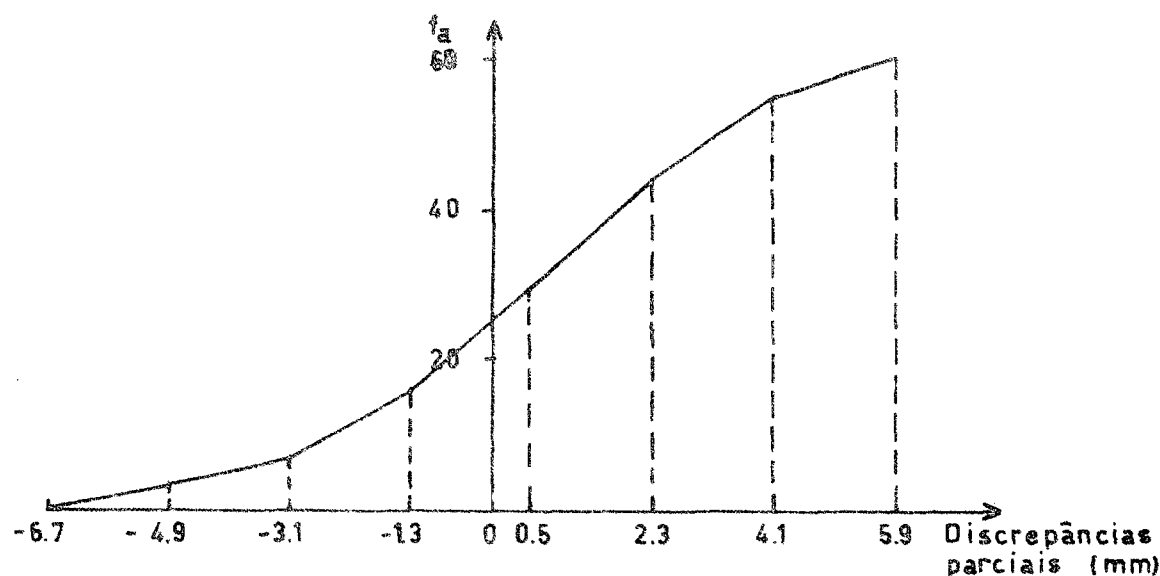


FIGURA 1.3

## 1.2 Medidas de posição

Por meio do histograma verifica-se que os dados observados variam em torno de um valor central, próximo do qual apresentam maior concentração.

Os resultados contidos nos dados podem ser apresentados de uma forma mais sintética por uma medida de posição deste valor central e por uma medida de variação dos dados, ou seja, a sua dispersão em torno do valor central.

Uma das medidas de posição mais utilizada é a média aritmética. A média aritmética de um conjunto de  $n$  valores:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , é definida por

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (1.2)$$

No caso dos dados observados serem distribuídos segundo uma tabela de frequências, a média aritmética será calculada por

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i}{\sum_{i=1}^k f_i} \quad (1.3)$$

onde os valores de  $x$  representam os pontos médios das  $k$  classes e  $f_i$  as frequências correspondentes.

Outra medida de posição menos utilizada é a mediana. A mediana de um conjunto de  $n$  valores ordenados:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , é o valor central do conjunto (para  $n$  ímpar) ou a média aritmética dos dois valores centrais (para  $n$  par).

Se os dados observados são distribuídos segundo uma tabela de frequências, então a mediana será calculada por

$$Me = L_i + \frac{P - f_a}{f_{Me}} \cdot h \quad (1.4)$$

onde:  $Me$  = mediana

$L_i$  = limite inferior da classe mediana (em uma distribuição de frequência chama-se classe mediana à classe que contém a mediana)

$f_a$  = frequência acumulada da classe anterior à classe mediana



$h$  = amplitude da classe mediana

$f_{Me}$  = freqüência da classe mediana

$$P = \sum_{i=1}^k f_i / 2 = n/2.$$

### 1.3 Medidas de dispersão

As medidas de dispersão são as medidas estatísticas que servem para indicar o quanto os dados se apresentam dispersos em relação ao seu valor médio.

A medida de dispersão mais simples é dada pela amplitude total, ou seja, a diferença entre a maior e a menor observação.

Uma das medidas de dispersão mais utilizada é a variância. A variância  $s^2$  de um conjunto de  $n$  valores:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , é dada por

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \quad (1.5)$$

No caso de dados agrupados segundo uma distribuição de freqüências tem-se

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}, \quad (1.6)$$

onde  $n = \sum_{i=1}^k f_i$  e  $x_i$  = ponto médio de classe.

A variância como medida de dispersão apresenta a desvantagem de possuir dimensão diferente da dos dados iniciais . Dessa forma, a variância da discrepância parcial será dada em  $\text{mm}^2$ .

A desvantagem da variância pode ser evitada com uma medida de dispersão da mesma dimensão que os dados, como por exemplo o desvio padrão que é igual à raiz quadrada positiva da variância, ou uma medida adimensional, o coeficiente de variação que é o quociente entre o desvio padrão e a média, ou seja

$$cv = \frac{s}{\bar{x}} \quad (1.7)$$

## CAPÍTULO 2

## DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS DE PROBABILIDADES

2.1 Variável aleatória

É uma função que associa números reais aos eventos (qualquer subconjunto de um espaço amostral) de um espaço amostral (conjunto de todos os resultados possíveis de ocorrer em um experimento sujeito às leis do acaso).

2.2 Variável aleatória contínua

Seja  $X$  uma variável aleatória. Suponha-se que  $R_X$ , o contradomínio de  $X$ , seja um intervalo ou uma coleção de intervalos. Então, diz-se que  $X$  é uma variável aleatória contínua.

2.3 Função de distribuição2.3.1 Definição

Chama-se função de distribuição  $F_X(x)$  de uma variável aleatória contínua  $X$ , no ponto  $x$ , a probabilidade de  $X$  ser menor ou igual a  $x$ . Assim

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (2.1)$$

Nota-se que  $F_X(x)$  é a probabilidade acumulada desde  $-\infty$  até  $x$ .

### 2.3.2 Propriedades

1<sup>a</sup>)  $0 \leq F_X(x) \leq 1$ , pois  $F_X(x)$  é uma probabilidade.

2<sup>a</sup>)  $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ .

3<sup>a</sup>)  $F_X(x)$  é uma função monotônica não decrescente.

4<sup>a</sup>)  $F_X(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ .

5<sup>a</sup>)  $F_X(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ .

## 2.4 Função densidade de probabilidade (fdp)

### 2.4.1 Conceito

Seja  $X$  uma variável aleatória contínua, então

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) \quad (2.2)$$

Dividindo esta probabilidade pela amplitude  $b-a$  do intervalo  $[a, b]$ , resulta

$$\frac{P(a \leq X \leq b)}{b - a} = \frac{F_X(b) - F_X(a)}{b - a} \quad (2.3)$$

sendo este quociente denominado de densidade média de probabilidade no intervalo  $[a, b]$ .

Desejando-se a densidade de probabilidade no ponto  $a$ , basta fazer

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{F_X(b) - F_X(a)}{b - a} = f_X(a) \quad (2.4)$$

ou seja,  $f_X(a)$  nada mais é que a derivada de  $F_X(x)$  no ponto  $a$ .

Portanto, chama-se densidade de probabilidade no ponto  $x$ , denotada por  $f_X(x)$ , a derivada neste ponto da função de distribuição, isto é

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dX} = F'_X(x) \quad (2.5)$$

#### 2.4.2 Propriedades

1ª)  $f_X(x) \geq 0$ , pois  $F_X(x)$  é monotônica não decrescente.

2ª)  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$ .

3ª)  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u) du = 1$ .

4ª)  $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(u) du$ .

5ª)  $P(X=a) = \lim_{b \rightarrow a} [F_X(b) - F_X(a)] = 0$ .

### 2.5 Parâmetros da distribuição

#### 2.5.1 Medidas de posição

### 2.5.1.1 Média, esperança matemática ou valor esperado

Seja  $X$  uma variável aleatória contínua com função densidade  $f_X(u)$ . A integral

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(u) du \quad (2.6)$$

é denominada de média ou esperança matemática da distribuição.

Se  $X$  assumir valores apenas dentro do intervalo  $[a, b]$ , fica subentendido que fora desse intervalo a função densidade é nula.

São válidas as seguintes propriedades:

1ª)  $E[kX] = kE[X]$ , sendo  $k$  uma constante.

2ª)  $E[k] = k$ .

3ª)  $E[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n]$ .

4ª)  $E[XY] = E[X]E[Y]$ , desde que  $X$  e  $Y$  sejam variáveis aleatórias independentes.

Se  $X$  for uma variável aleatória contínua e se  $Y=H(X)$  for uma função de  $X$ , então  $Y$  será também uma variável aleatória. Sendo  $g$  a fdp de  $Y$ , define-se

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y g(y) dy \quad (2.7)$$

### 2.5.1.2 Mediana

A mediana da distribuição de uma variável aleatória contínua  $X$  é o valor da variável para qual a função de distribuição vale  $1/2$ , isto é

$$F_X(x) = 1/2$$

### 2.5.2 Medidas de dispersão

#### 2.5.2.1 Variância

A variância de uma variável aleatória  $X$  de fdp (função densidade de probabilidade)  $f_X(u)$ , denotada por  $V[X]$  ou  $\sigma_X^2$ , é definida por

$$\begin{aligned} V[X] &= \sigma_X^2 = E\{X - E[X]\}^2 & (2.8) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \{x - E[X]\}^2 f_X(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(u) du - \{E[x]\}^2 \\ &= E[X^2] - \{E[X]\}^2 \end{aligned}$$

Demonstra-se as seguintes propriedades:

1ª)  $V[k] = 0$ , sendo  $k$  uma constante.

2ª)  $V[X + k] = V[X]$ .

$$3^a) \quad V[kX] = k^2 V[X].$$

$$4^a) \quad V[X \pm Y] = V[X] + V[Y] \pm 2 \text{cov}[X, Y].$$

Dadas duas variáveis aleatórias, X e Y, a covariância entre X e Y é, por definição <sup>[1]</sup>

$$\begin{aligned} \text{cov}[X, Y] &= E\{X - E[X]\{Y - E[Y]\} \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Se X e Y forem variáveis aleatórias independentes, tem-se

$$E[XY] = E[X]E[Y] \quad (2.10)$$

portanto, a covariância é nula.

Embora  $\text{cov}[X, Y] = 0$  sempre que X e Y são variáveis aleatórias independentes, o inverso não é verdadeiro, isto é, se  $\text{cov}[X, Y] = 0$ , nem sempre se pode concluir que X e Y sejam independentes.

#### 2.5.2.2 Desvio padrão

O desvio padrão  $\sigma_X$  de uma variável aleatória X de fdp  $f_X(x)$ , é definido por

$$\sigma_X = +\sqrt{V[X]} = +\sqrt{\sigma_X^2} \quad (2.11)$$



### 2.5.2.3 Coeficiente de variação

O coeficiente de variação de uma variável aleatória  $X$ , denotado por  $CV$ , é definido pelo quociente entre o desvio padrão e a média, ou seja

$$CV = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (2.12)$$

### 2.5.3 Coeficiente de correlação linear

O coeficiente de correlação linear entre as variáveis  $X$  e  $Y$ , denotado por  $\rho(X,Y)$ , é definido por

$$\rho(X,Y) = \frac{\text{cov}[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (2.13)$$

Quando  $X$  e  $Y$  forem independentes, tem-se que  $\text{cov}[X,Y]=0$  e, portanto  $\rho(X,Y)=0$ .

O coeficiente de correlação linear é uma característica numérica indicadora do grau de dependência linear entre duas variáveis aleatórias.

Dados  $\text{cov}[X,Y]=0$  e  $\rho(X,Y)=0$ , não é possível concluir, em geral, que as variáveis são independentes.

Se as variáveis tem distribuição normal, demonstra-se que  $\text{cov}[X,Y]=\rho(X,Y)=0$  é condição suficiente para que as variáveis sejam independentes.

Para  $\rho(X,Y)$ , demonstra-se que:

$$a) \quad -1 \leq \rho(X,Y) \leq 1.$$

- b)  $\rho(X,Y)=1$  se e somente se existirem  $a>0$  e  $b$  constantes, tais que  $Y=aX+b$ .
- c)  $\rho(X,Y)=-1$  se e somente se existirem  $a<0$  e  $b$  constantes, tais que  $Y=aX+b$ .
- d)  $\rho(X,Y)=0$  significa que não existe dependência linear entre  $X$  e  $Y$ .

## 2.6 Modelos teóricos de distribuições de variáveis contínuas

### 2.6.1 Distribuição normal (ou de Gauss)

#### 2.6.1.1 Definição

A variável aleatória  $X$  tem uma distribuição normal se sua fdp for da forma

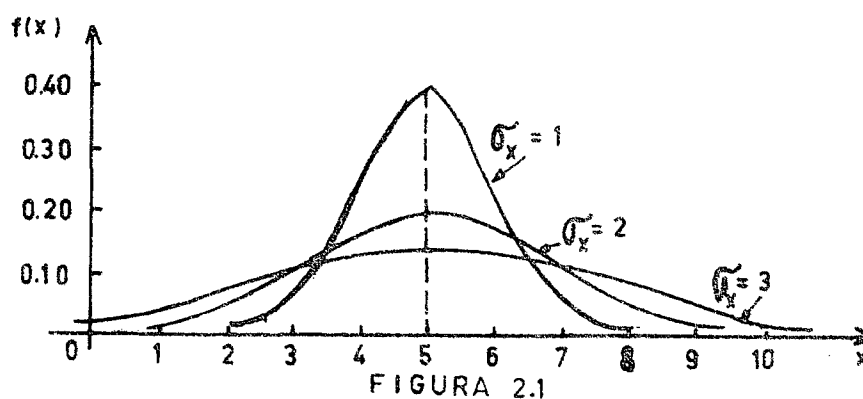
$$f(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2 \right], -\infty < x < +\infty \quad (2.14)$$

onde  $\mu_X$  e  $\sigma_X$  são os parâmetros: média e desvio padrão, respectivamente.

A notação utilizada para indicar que a variável aleatória  $X$  tem distribuição normal, com média  $\mu_X$  e variância  $\sigma_X^2$ , é

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \quad (2.15)$$

A figura 2.1 mostra três curvas normais com média  $\mu_X=5$  e desvios padrões  $\sigma_X=1, 2$  e  $3$  respectivamente.



#### 2.6.1.2 Propriedades

1<sup>a</sup>) Sendo  $f(x)$  uma função par, a distribuição é simétrica em relação à média  $\mu_X$ .

2<sup>a</sup>)  $f(x)$  assume valor máximo para  $x = \mu_X$ .

3<sup>a</sup>)  $f(x)$  tende para zero quando  $x$  tende para  $-\infty$  ou para  $+\infty$ , ou seja,  $f(x)$  é sempre positiva e é duplamente assintótica ao eixo das abcissas, pois:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

4<sup>a</sup>)  $f(x)$  admite pontos de inflexão para  $x = \mu_X \pm \sigma_X$ .

Na figura 2.2 pode-se constatar as propriedades vistas

acima.

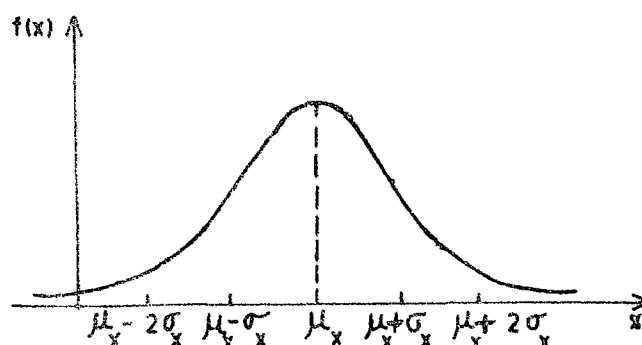


FIGURA 2.2

### 2.6.1.3 Função distribuição

Por definição

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du, \quad (2.16)$$

portanto

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp \left[ -\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2} \right] dx. \quad (2.17)$$

### 2.6.1.4 Curva normal padronizada

Fazendo-se a mudança de variável

$$z = \frac{x-\mu_X}{\sigma_X} \quad (2.18)$$

que substituindo em (2.17) fica

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp(-z^2/2) dz \quad (2.19)$$

que é a função distribuição para a variável normal reduzida ou padronizada Z. Essa integral tem sido calculada por métodos de integração numérica, sendo encontrada tabelada na maioria dos textos básicos de estatística.

Esta transformação corresponde a uma nova distribuição normal de média  $\mu_Z=0$  e variância  $\sigma_Z^2=1$ , isto é

$$Z \sim N(0,1)$$

### 2.6.1.5 Teorema do limite central

Esse teorema, em geral apresentado sob diversas formas, afirma, em essência, que, sob condições bastante gerais, uma variável aleatória, resultante de uma soma de  $n$  variáveis aleatórias independentes, no limite, quando  $n$  tende ao infinito, tem distribuição normal  $|^{02}|$ .

### 2.6.2 Distribuição de gama

#### 2.6.2.1 Definição

Seja  $X$  uma variável aleatória contínua. Diz-se que  $X$  tem uma distribuição gama, se sua fdp for dada por

$$f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(r)} (\alpha x)^{r-1} e^{-\alpha x}, \quad x \geq 0 \quad (2.20)$$

Essa distribuição depende de dois parâmetros:  $r$  e  $\alpha$ , dos quais se exige:  $r \geq 1$  e  $\alpha > 0$ .

Para a distribuição gama, tem-se que

$$E[X] = r/\alpha \quad (2.21)$$

$$V[X] = r/\alpha^2 \quad (2.22)$$

#### 2.6.2.2 Função gama

A função gama com parâmetro  $r$ , denotada por  $\Gamma(r)$ , é definida pela integral imprópria

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-x} dx, \quad r > 0 \quad (2.23)$$

Se  $r=1$ , a Eq. (2.20) fica  $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$ . Portanto, a distribuição exponencial é um caso particular da distribuição gama.

Demonstra-se que:

$$1^\circ) \Gamma(r) = (r-1) \Gamma(r-1).$$

$$2^\circ) \text{ Se } r = n, \text{ inteiro e positivo, então } \Gamma(n) = (n-1)!.$$

### 2.6.3 Distribuição de qui-quadrado

#### 2.6.3.1 Teorema |<sup>03</sup>|

Sejam  $Z_1, Z_2, \dots, Z_v$ ,  $v$  variáveis aleatórias independentes e normais, com média 0 e variância 1. Então, a variável aleatória:

$$\chi^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_v^2 = \sum_{i=1}^v Z_i^2$$

tem fdp dada por

$$f(\chi^2) = \frac{1}{2^{v/2} \Gamma(v/2)} (\chi^2)^{(v/2)-1} e^{-\chi^2/2}, \chi^2 \geq 0 \quad (2.24)$$

com média  $v$  e variância  $2v$ . Diz-se que  $\chi^2$  segue uma distribuição qui-quadrado com parâmetro  $v$ .

A figura 2.3 representa a curva da distribuição de  $\chi^2$ , para  $v=1, 4$  e  $10$ .

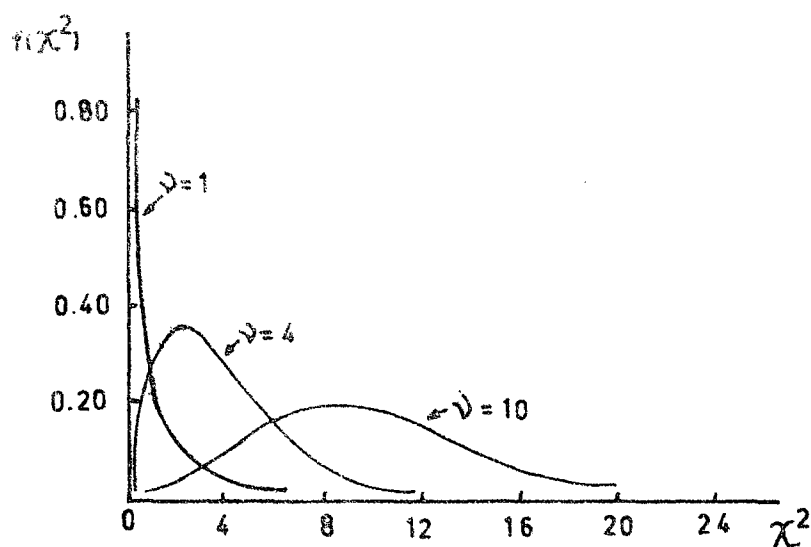


FIGURA 2.3

A distribuição de  $\chi^2$  é um caso especial da distribuição gama, em que:  $x=\chi^2$ ,  $\alpha=1/2$  e  $r=v/2$ .

A estatística

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2 \quad (2.25)$$

sendo  $\bar{x}$  a estimativa de  $\mu$ , segue uma distribuição do tipo  $\chi^2$  com o parâmetro  $v=n-1$  sendo denominado de graus de liberdade dessa estatística. A (2.25) pode ser colocada na forma

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \quad (2.26)$$

onde  $s^2$  representa a variância amostral

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (2.27)$$

#### 2.6.3.2 Propriedade da aditividade de $\chi^2$

A soma de  $k$  variáveis aleatórias independentes:  $\chi_1^2, \chi_2^2, \dots, \chi_k^2$ , tendo distribuição  $\chi^2$  com:  $v_1, v_2, \dots, v_k$  graus de liberdade, respectivamente, tem distribuição  $\chi^2$  com  $v_1 + v_2 + \dots + v_k$ , graus de liberdade.

#### 2.6.4 Distribuição t de Student

##### 2.6.4.1 Teorema |<sup>04</sup>|

Se  $Z \sim N(0,1)$  e  $W \sim \chi^2(v)$ , sendo  $Z$  e  $\sqrt{W}$  variáveis aleatórias independentes, então a variável aleatória

$$t = \frac{Z}{\sqrt{W/v}} \quad (2.28)$$

tem fdp dada por

$$f(t) = \frac{\Gamma[(v+1)/2]}{\sqrt{\pi v} \Gamma(v/2)} \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-(v+1)/2}, \quad -\infty < t < \infty \quad (2.29)$$

com média 0 e variância  $v/(v-2)$  para  $v > 2$ .

A figura 2.4 mostra a distribuição t de Student para  $v=1,5$  e  $\infty$ .



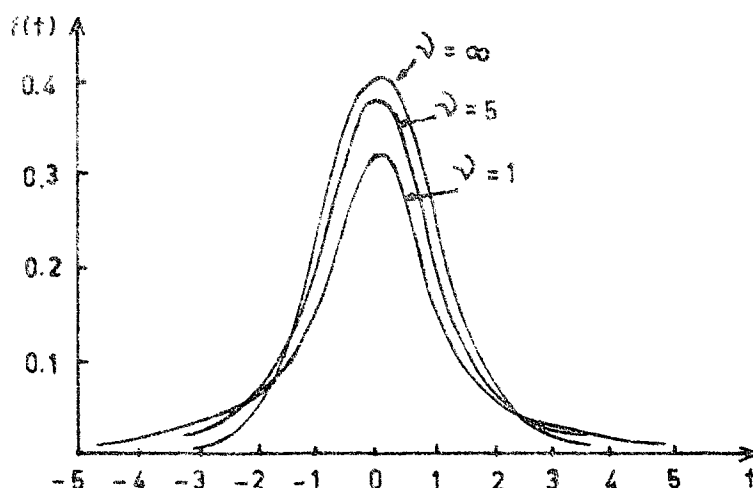


FIGURA 2.4

Se uma amostra aleatória:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , é obtida de uma população normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , então a estatística

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \quad (2.30)$$

é distribuída segundo uma distribuição t de Student com parâmetro  $v=n-1$  sendo denominado de graus de liberdade.

Se duas populações são normais e tem a mesma variância, então a estatística

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_p^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \quad (2.31)$$

tem uma distribuição t de Student com  $n_1 + n_2 - 2$  graus de liberdade. As amostras aleatórias:  $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}$  e  $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}$  de tamanhos  $n_1$  e  $n_2$  são independentemente obtidas das populações 1 e 2 com médias  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , respectivamente. As médias amostrais são

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n_1} x_{1j}}{n_1} \quad \text{e} \quad \bar{x}_2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_2} x_{2j}}{n_2}$$

e a variância amostral agrupada é

$$s_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad (2.32)$$

#### 2.6.4.2 Propriedade da distribuição t de Student

Quando o número de graus de liberdade de  $s^2$  tende ao infinito, a distribuição t de Student tende a uma distribuição normal com média 0 e variância 1.

#### 2.6.5 Distribuição F de Snedecor

##### 2.6.5.1 Teorema [05]

Sejam as variáveis aleatórias independentes:  $\chi_1^2$  e  $\chi_2^2$ , distribuídas segundo uma distribuição de  $\chi^2$  com  $v_1$  e  $v_2$  graus de liberdade, respectivamente. Então

$$F = F(v_1, v_2) = \frac{\chi_1^2/v_1}{\chi_2^2/v_2} = \frac{v_2}{v_1} \frac{\chi_1^2}{\chi_2^2} \quad (2.33)$$

é distribuída com função densidade

$$f(F) = \frac{\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)} \cdot \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{v_1/2} \cdot \frac{F^{(v_1-2)/2}}{\left(1 + \frac{v_1 F}{v_2}\right)^{(v_1+v_2)/2}}, \quad F \geq 0$$

(2.34)

com média

$$\frac{v_2}{v_2-2}, \quad (v_2 > 2)$$

e variância

$$\frac{2v_2^2(v_1+v_2-2)}{v_1(v_2-2)^2(v_2-4)}, \quad (v_2 > 4)$$

A figura 2.5 mostra a distribuição F de Snedecor para  $(v_1, v_2) = (4, 4), (10, 4)$  e  $(4, 25)$ .

Como  $\chi^2/v = s^2/\sigma^2$ , então

$$F = \frac{\chi_1^2/v_1}{\chi_2^2/v_2} = \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} \quad (2.35)$$

Seja  $F_\alpha = F_\alpha(v_1, v_2)$  denotando o valor de  $F = F(v_1, v_2)$  para o qual  $P(F > F_\alpha) = \alpha$ . Demonstra-se [6] que

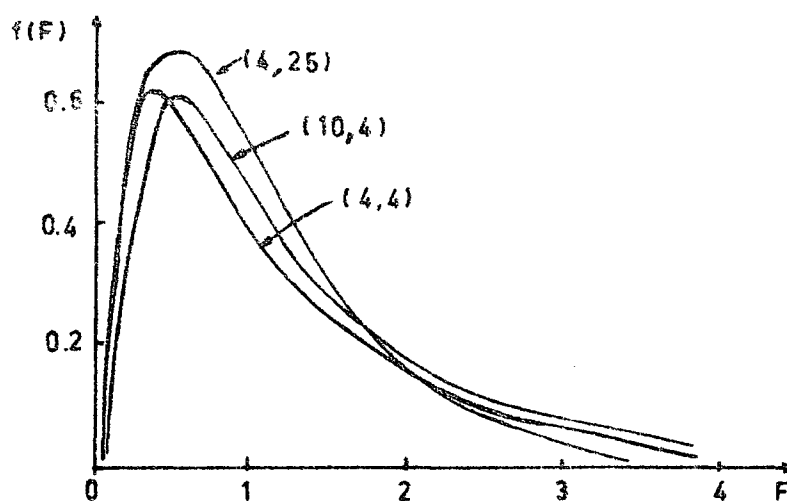


FIGURA 2.5

$$F_{1-\alpha}(v_1, v_2) = 1/F_{\alpha}(v_2, v_1) \quad (2.36)$$

#### 2.6.5.2 Propriedade da razão $s_1^2/s_2^2$

Sejam  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$  as variâncias de duas populações normais. Sejam  $s_1^2$  e  $s_2^2$  com  $v_1$  e  $v_2$  graus de liberdade dois estimadores das variâncias  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$ , respectivamente. Então a razão  $s_1^2/s_2^2$  segue uma distribuição F com  $v_1$  e  $v_2$  graus de liberdade quando  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ .

## CAPÍTULO 3

## ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

3.1 Introdução

A dedução de informações relativas a uma população, mediante a utilização de amostras aleatórias dela extraídas, diz respeito à inferência estatística.

Um problema importante da inferência estatística é a estimação de parâmetros (tais como a média, o desvio padrão, a variância da população, etc) deduzidos da estatística (média, desvio padrão, variância da amostra, etc) correspondente.

Pode-se distinguir dois casos de estimação de parâmetros: por ponto e por intervalo. No primeiro caso, obtém-se um valor único para o parâmetro, ao passo que, no segundo, constrói-se um intervalo, o qual deverá, com probabilidade conhecida, conter o parâmetro.

3.2 Estimador

Estimador  $\hat{\theta}$  de um parâmetro  $\theta$  é a variável aleatória, função dos elementos da amostra, que será utilizada na estimação.

3.3 Estimativa

É o valor numérico obtido pelo estimador (ou estatística) numa certa amostra. A notação para estimativa será através

de letras minúsculas, como por exemplo,  $\bar{x}$  para a média aritmética,  $s$  para o desvio padrão, etc.

### 3.4 Principais qualidades de um estimador

#### 3.4.1 Estimador não-tendencioso (ou justo, ou sem vício, ou sem viés)

Um estimador  $\hat{\theta}$  de um parâmetro  $\theta$  é dito não-tendencioso se

$$E[\hat{\theta}] = \theta \quad (3.1)$$

A tendenciosidade (B) é definida como sendo a diferença

$$B = E[\hat{\theta}] - \theta \quad (3.2)$$

#### 3.4.2 Estimador consistente (ou coerente)

Um estimador  $\hat{\theta}$  de um parâmetro  $\theta$  é dito consistente se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta} - \theta| \geq \epsilon) = 0, \quad (3.3)$$

para todo  $\epsilon > 0$ .

Para estimadores não-tendenciosos, a condição de consistência seria

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\hat{\theta}) = 0, \quad (3.4)$$

ou seja, a sua variância tende a zero quando o tamanho da amostra tende a infinito.

### 3.4.3 Estimador eficiente

Dados dois estimadores,  $\hat{\theta}_1$  e  $\hat{\theta}_2$ , a serem usados na estimação de um mesmo parâmetro  $\theta$ , diz-se que  $\hat{\theta}_1$  é mais eficiente que  $\hat{\theta}_2$  como estimador de  $\theta$  se, para o mesmo tamanho da amostra,

$$E[(\hat{\theta}_1 - \theta)^2] < E[(\hat{\theta}_2 - \theta)^2] \quad (3.5)$$

Se  $\hat{\theta}_1$  e  $\hat{\theta}_2$  forem estimadores não-tendenciosos de  $\theta$ , essa condição indicará que a variância de  $\hat{\theta}_1$  é menor que a variância de  $\hat{\theta}_2$ .

Se  $\hat{\theta}_1$  é mais eficiente que  $\hat{\theta}_2$  como estimador do parâmetro  $\theta$ , pode-se definir a relação

$$\frac{E[(\hat{\theta}_1 - \theta)^2]}{E[(\hat{\theta}_2 - \theta)^2]} \quad (3.6)$$

como sendo a eficiência de  $\hat{\theta}_2$  em relação a  $\hat{\theta}_1$  como estimador de  $\theta$ . Se os estimadores  $\hat{\theta}_1$  e  $\hat{\theta}_2$  forem ambos justos, a eficiência relativa se reduzirá ao quociente das respectivas variâncias.

### 3.5 Estimador de máxima verossimilhança

O estimador de máxima verossimilhança (EMV)  $\hat{\theta}$  do parâmetro  $\theta$  da função densidade  $f_X(x;\theta)$  é um estimador que torna máxima a função de verossimilhança  $L(\theta)$ , considerada como função de  $\theta$  [17].

Para uma amostra  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i; \theta) \quad (3.7)$$

é a função de verossimilhança de  $\theta$ .

Na determinação do máximo da função  $L(\theta)$  pode ser usado o logaritmo neperiano de  $L(\theta)$ ; dessa maneira transforma-se o produto em soma de funções o que é bastante cômodo, já que o máximo da função ocorre para o mesmo valor de  $\theta$ .

Portanto, deve-se calcular o máximo de

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln f_X(x_i; \theta) \quad (3.8)$$

De acordo com a técnica exposta, surge a equação de verossimilhança para a determinação do EMV  $\hat{\theta}$  do parâmetro  $\theta$ ,

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = 0 \quad (3.9)$$

Geralmente o EMV é justo ou não-tendencioso, existindo casos em que esse estimador é pobre, mas, na maioria dos casos o EMV tem as propriedades desejadas. Uma vantagem do EMV é que



nos casos em que ele é tendencioso, a tendenciosidade é função inversa de  $n$ , de modo que ele é sempre consistente.

### 3.6 Estimação por pontos

Na estimação por pontos o parâmetro é estimado através de um valor único, o qual corresponde a um ponto sobre o eixo de variação da variável.

Para a média da população, o estimador mais utilizado é a média aritmética amostral  $\bar{X}$ , sendo um estimador não-tendencioso e eficiente. No caso da variância populacional, o estimador, utilizado é

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} \quad (3.10)$$

que é um estimador não tendencioso  $|^{08}|$ . A raiz quadrada positiva de  $s^2$  é o estimador  $S$  do desvio padrão populacional, sendo esse estimador tendencioso. A tendenciosidade de  $S$  como estimador do desvio padrão populacional, tende assintoticamente a zero, ou seja, para grandes amostras, pode-se adotar como estimativa o próprio desvio padrão da amostra.

### 3.7 Estimação por intervalos

#### 3.7.1 Introdução

Na estimação por intervalos, constrói-se um intervalo em torno da estimativa por ponto, de modo que esse intervalo

tenha uma probabilidade conhecida de conter o verdadeiro valor do parâmetro.

Seja o parâmetro  $\theta$ , tal que

$$P(\hat{\theta}_1 \leq \theta \leq \hat{\theta}_2) = 1-\alpha \quad (3.11)$$

- a) o intervalo  $\hat{\theta}_1 \leq \theta \leq \hat{\theta}_2$  é denominado de intervalo de confiança desse parâmetro;
- b) os extremos desse intervalo ( $\hat{\theta}_1$  e  $\hat{\theta}_2$ ) são denominados de limites de confiança;
- c) a probabilidade conhecida  $1-\alpha$  é denominada de nível de confiança.

A escolha do nível de confiança ( $1-\alpha$ ) depende da precisão com que se deseja estimar o parâmetro. É muito comum a utilização dos níveis de 95% e 99%. Evidentemente, o aumento de confiança no intervalo implica no aumento de sua amplitude.

### 3.7.2 Intervalo de confiança para a média $\mu$ da população

#### 3.7.2.1 Quando o desvio padrão populacional $\sigma$ for conhecido

##### 19) Unilaterais

$$a) \quad P\left(\bar{X} - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu < +\infty\right) = 1-\alpha \quad (3.12)$$

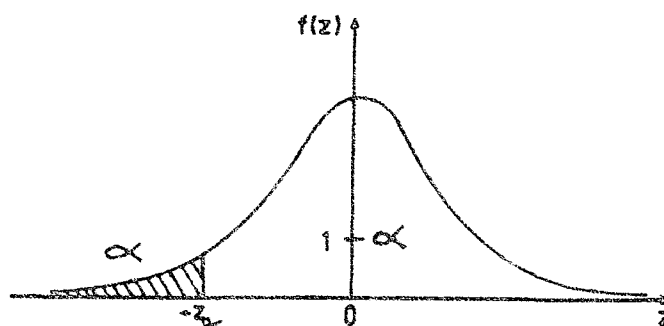


FIGURA 3.1

$$b) \quad P(-\infty < \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha \quad (3.13)$$

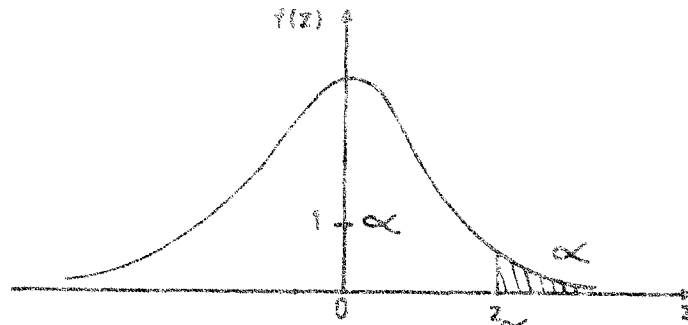


FIGURA 3.2

2º) Bilateral

$$P(\bar{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha \quad (3.14)$$

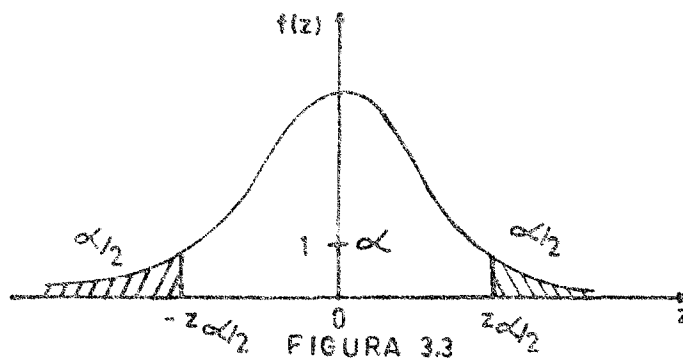


FIGURA 3.3

3.7.2.2 Quando o desvio padrão populacional  $\sigma$  for desconhecido1º) Unilaterais

$$a) \quad P(\bar{X} - t_{\alpha} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu < +\infty) = 1 - \alpha \quad (3.15)$$

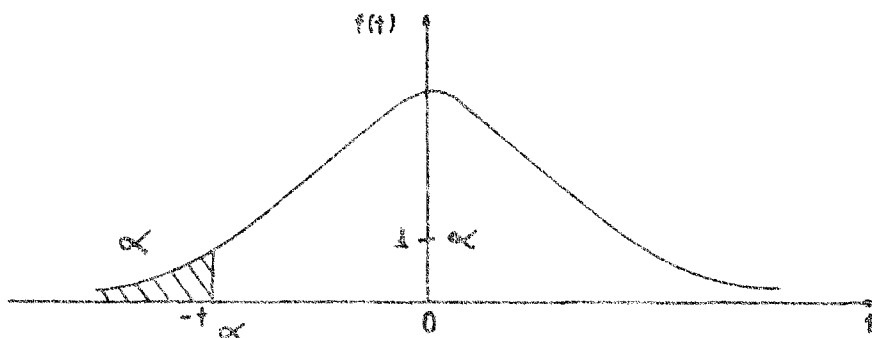


FIGURA 3.4

$$b) \quad P(-\infty < \mu \leq \bar{X} + t_{\alpha} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha \quad (3.16)$$

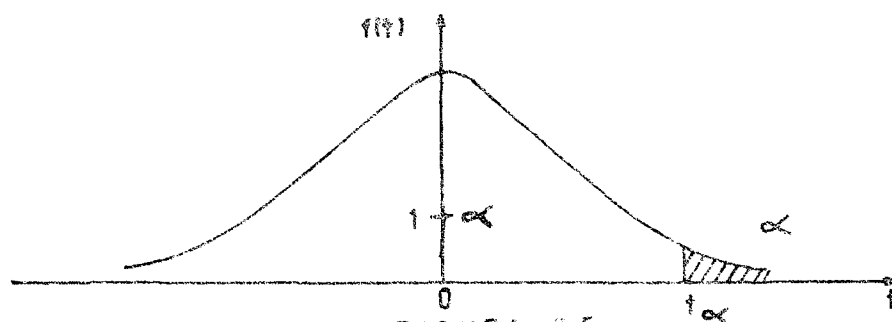


FIGURA 3.5

29) Bilateral

$$P(\bar{X} - t_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha \quad (3.17)$$

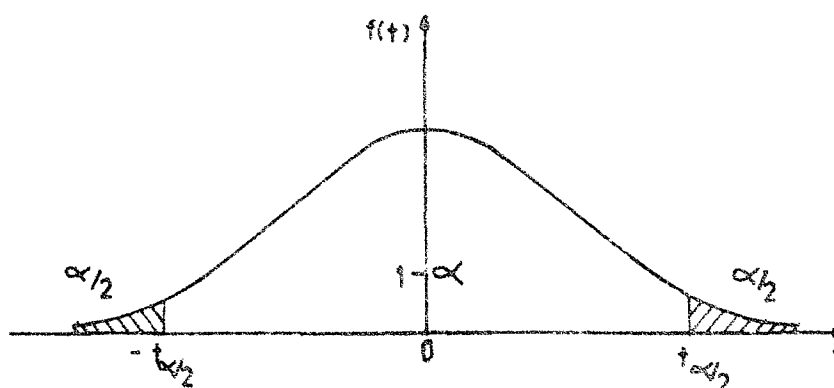


FIGURA 3.6

3.7.3 Intervalo de confiança para a diferença entre as médias populacionais  $\mu_1$  e  $\mu_2$

3.7.3.1 Quando as variâncias populacionais  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$  forem conhecidas

19) Unilaterais

$$a) \quad P\left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - z_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 < +\infty\right] = 1 - \alpha \quad (3.18)$$

Ver figura 3.1

$$b) \quad P \left[ -\infty < \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + z_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right] = 1 - \alpha \quad (3.19)$$

Ver figura 3.2

## 29) Bilateral

$$P \left[ (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right] = 1 - \alpha \quad (3.20)$$

3.7.3.2 Quando as variâncias populacionais  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$  forem desconhecidas e supostamente iguais

## 19) Unilaterais

$$a) \quad P \left[ (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\alpha} \sqrt{S_p^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} \leq \mu_1 - \mu_2 < +\infty \right] = 1 - \alpha \quad (3.21)$$

onde  $v = n_1 + n_2 - 2$

$$e \quad S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \quad (3.22)$$

Ver figura 3.4 .

$$b) \quad P \left[ (-\infty < \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\alpha} \sqrt{S_p^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} \right] = 1 - \alpha \quad (3.23)$$

Ver figura 3.5

## 2º Bilateral

$$P \left[ (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\alpha/2} \sqrt{S_p^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\alpha/2} \sqrt{S_p^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} \right] = 1 - \alpha \quad (3.24)$$

Ver figura 3.6

3.7.3.3 Quando as variâncias populacionais  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$  forem desconhecidas e supostamente diferentes

## 1º) Unilaterais

$$a) \quad P \left[ (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\alpha} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 < +\infty \right] = 1 - \alpha \quad (3.25)$$

onde

$$v = \frac{(w_1^2 + w_2^2)^2}{w_1^2 / (n_1 - 1) + w_2^2 / (n_2 - 1)} \quad (3.26)$$

sendo  $w_1$  e  $w_2$  calculados por

$$w_1 = \frac{S_1^2}{n_1} \quad \text{e} \quad w_2 = \frac{S_2^2}{n_2} \quad (3.27)$$

Este é um método aproximado conhecido como de Aspin-Welch [19].

$$b) \quad P \left[ -\infty < \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\alpha} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \right] = 1 - \alpha \quad (3.28)$$

## 2º Bilateral

$$P \left[ (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \right] = 1 - \alpha \quad (3.29)$$

## 3.7.4 Intervalo de confiança para a variância populacional $\sigma^2$

### 1º) Unilaterais

$$a) \quad P \left[ 0 \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2} \right] = 1 - \alpha \quad (3.30)$$

onde  $v = n-1$

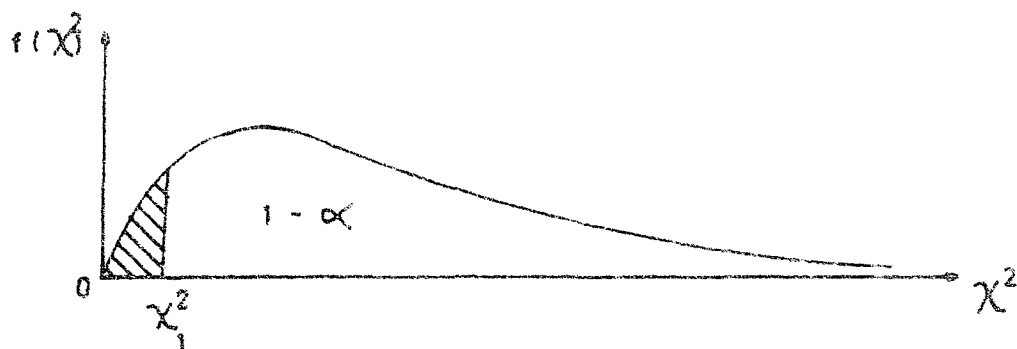


FIGURA 3.7

$$b) \quad P \left[ \frac{(n-1)s^2}{x_2^2} \leq \sigma^2 < +\infty \right] = 1 - \alpha \quad (3.31)$$

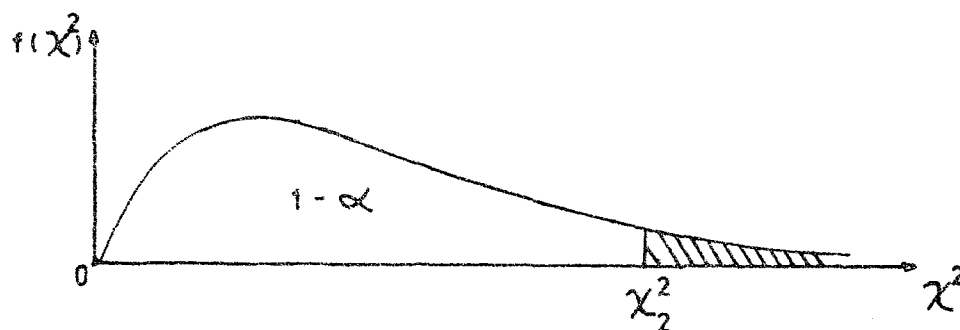


FIGURA 3.8

29) Bilateral

$$P \left[ \frac{s^2(n-1)}{x_2^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{s^2(n-1)}{x_1^2} \right] = 1 - \alpha \quad (3.32)$$

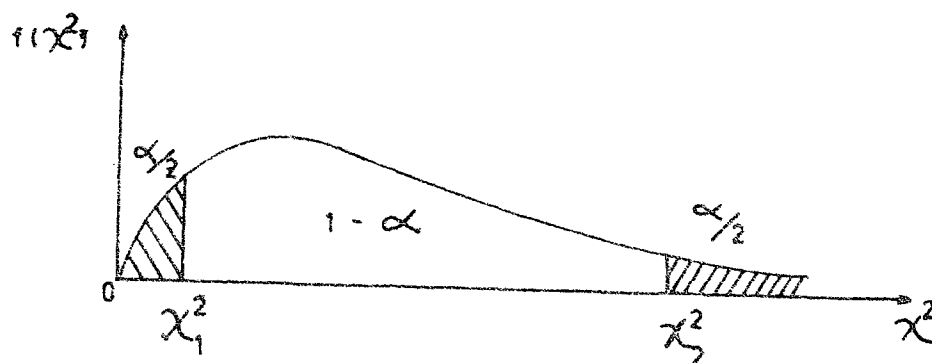


FIGURA 3.9



Para obter o intervalo de confiança do desvio padrão populacional  $\sigma$ , basta tomar a raiz quadrada positiva de  $\sigma^2$ .

### 3.7.5 Intervalo de confiança para o quociente entre duas variâncias populacionais $\sigma_1^2$ e $\sigma_2^2$

#### 19) Unilaterais

$$a) \quad P \left[ 0 \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{1}{F_1} \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2} \right] = 1 - \alpha \quad (3.33)$$

onde  $v_1 = n_1 - 1$  e  $v_2 = n_2 - 1$ .

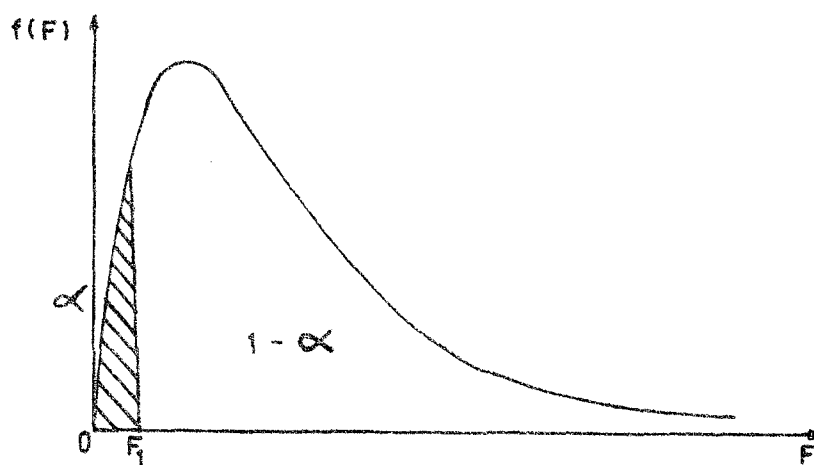


FIGURA 3.10

$$b) \quad P \left[ \frac{1}{F_2} \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < +\infty \right] = 1 - \alpha \quad (3.34)$$

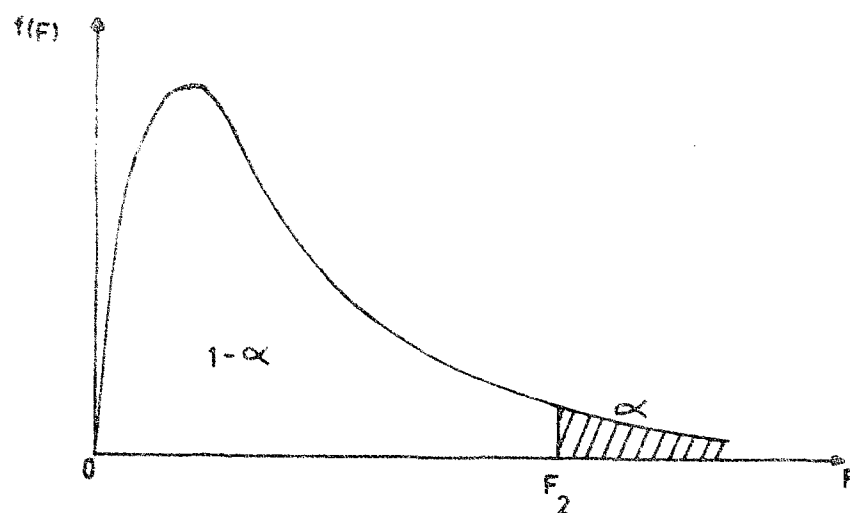


FIGURA 3.11

29) Bilateral

$$P \left[ \frac{1}{F_2} \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{1}{F_1} \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2} \right] = 1 - \alpha \quad (3.35)$$

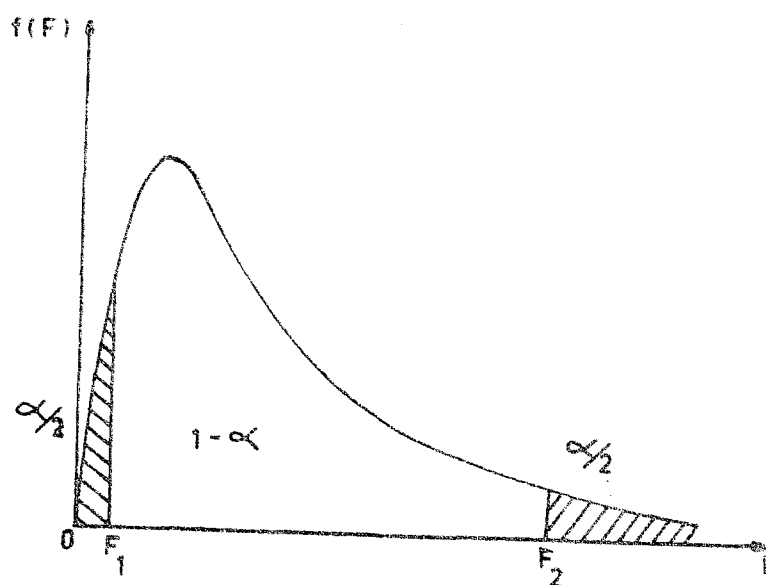


FIGURA 3.12

## CAPÍTULO 4

## TESTES DE HIPÓTESES

4.1 Definições4.1.1 Hipóteses estatísticas

São suposições que se faz, acerca dos parâmetros de uma população, ao tentar a fixação de decisões. Essas suposições poderão ser verdadeiras ou não.

4.1.2 Hipóteses nula e alternativa

- a) Hipótese nula ( $H_0$ ): é a hipótese a ser validada pelo teste.
- b) Hipótese alternativa ( $H_1$ ): é qualquer hipótese diferente da hipótese nula.

O teste de hipótese coloca a hipótese nula  $H_0$  em contraposição à alternativa  $H_1$ .

4.1.3 Regiões de aceitação e rejeição da hipótese

- a) Região de aceitação (R.A.): é a região em que se aceita a hipótese nula  $H_0$ . Pode ser um trecho do eixo das abcissas no qual estão representados os valores observados da variável aleatória.
- b) Região de rejeição (R.R) ou região crítica (R.C.): é a região em que se rejeita a hipótese nula  $H_0$ , sendo complementar à R.A.

#### 4.1.4 Erros dos tipos I e II

Na aplicação de um teste de hipótese, pode-se cometer dois tipos de erros, são os erros dos tipos I e II.

- a) Erro do tipo I: é o erro cometido ao rejeitar a hipótese nula, sendo ela verdadeira.
- b) Erro do tipo II: é o erro cometido ao aceitar a hipótese nula, sendo ela falsa.

#### 4.1.5 Nível de significância

É a probabilidade máxima com a qual se sujeitaria a correr o risco de um erro do tipo I. Essa probabilidade pode ser representada da seguinte maneira

$$\alpha = P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ verdadeira}) \quad (4.1)$$

Na prática é muito comum o uso dos níveis 0,05 e 0,01

#### 4.1.6 Função característica

É a probabilidade de cometer o erro do tipo II, ou seja

$$\beta = P(\text{aceitar } H_0 | H_0 \text{ falsa}) \quad (4.2)$$

#### 4.1.7 Função do poder

É a probabilidade de que a variável aleatória  $X$  caia na R.R., sendo  $H_1$  verdadeira e  $H_0$  falsa, ou seja

$$\pi = 1 - \beta \quad (4.3)$$

Notar que  $\pi = 1 - \beta$ , representa a probabilidade de se rejeitar uma hipótese falsa.

#### 4.1.8 Testes unilateral e bilateral

- a) Teste unilateral: quando a R.R. estiver em um dos extremos do eixo X.
- b) Teste bilateral: quando a R.R. estiver nos dois extremos do eixo X.

#### 4.1.9 Curva característica de operação (C.C.O.)

É a representação gráfica de  $\beta$ . Ela é construída marcando-se em abcissas os valores do parâmetro  $\theta$ , ou de uma variável a ele associada, e em ordenadas a probabilidade de aceitar  $H_0$ , quando ela for falsa.

Uma C.C.O. está associada a cada teste de hipótese e resume as condições fundamentais de funcionamento ou operação do teste. Embora em muitos casos comuns não seja indispensável construir a C.C.O., ela é sempre útil para a compreensão do teste.

#### 4.2 Esquema geral de um teste

- 1º) Enunciar a hipótese nula  $H_0$ .
- 2º) Enunciar a hipótese alternativa  $H_1$ .
- 3º) Fixar o nível de significância  $\alpha$ .



2º caso: Se a variância populacional  $\sigma^2$  for desco-  
nhecida

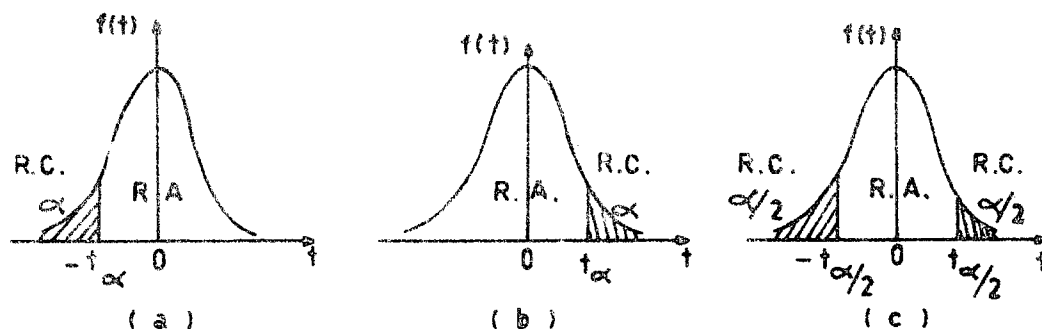


FIGURA 4.2

5º) Calcular

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \quad \text{ou} \quad t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}} \quad (4.4)$$

6º) Conclusões

- a) se  $z < -z_\alpha$  ou  $t < -t_\alpha$  : rejeita-se  $H_0$
- b) se  $z > z_\alpha$  ou  $t > t_\alpha$  : rejeita-se  $H_0$
- c) se  $|z| > z_{\alpha/2}$  ou  $|t| > t_{\alpha/2}$  : rejeita-se  $H_0$ .

4.4

Teste para a diferença entre duas médias populacionais

$\mu_1$  e  $\mu_2$

1º caso: Se as variâncias populacionais  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$  fo-  
rem conhecidas

$$1º) H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0$$

$$2º) H_1: \begin{cases} a) \mu_1 - \mu_2 < d_0 \\ b) \mu_1 - \mu_2 > d_0 \\ c) \mu_1 - \mu_2 \neq d_0 \end{cases}$$

39) Fixar o nível de significância  $\alpha$ .

49) Determinar a região crítica, conforme fig. 4.1 .

59) Calcular

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad (4.5)$$

69) Conclusões

a) se  $z < -z_\alpha$  : rejeita-se  $H_0$

b) se  $z > z_\alpha$  : rejeita-se  $H_0$

c) se  $|z| > z_{\alpha/2}$  : rejeita-se  $H_0$

2º caso: Se as variâncias populacionais  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$  forem desconhecidas e supostamente iguais

19)  $H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0$



$$29) H_1: \begin{cases} a) \mu_1 - \mu_2 < d_0 \\ b) \mu_1 - \mu_2 > d_0 \\ c) \mu_1 - \mu_2 \neq d_0 \end{cases}$$

39) Fixar o nível de significância  $\alpha$ .

49) Determinar a região crítica, sendo o número de graus de liberdade  $v = n_1 + n_2 - 2$ , conforme fig. 4.2

59) Calcular

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{s_p^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \quad (4.6)$$

69) Conclusões

a) se  $t < -t_\alpha$  : rejeita-se  $H_0$

b) se  $t > t_\alpha$  : rejeita-se  $H_0$

c) se  $|t| > t_{\alpha/2}$  : rejeita-se  $H_0$ .

3º caso: Se as variâncias populacionais  $\sigma_1^2$   $\sigma_2^2$  forem desconhecidas e supostamente diferentes

$$1^\circ) H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0$$

$$2^\circ) H_1: \begin{cases} a) \mu_1 - \mu_2 < d_0 \\ b) \mu_1 - \mu_2 > d_0 \\ c) \mu_1 - \mu_2 \neq d_0 \end{cases}$$

3º) Fixar o nível de significância  $\alpha$ .

4º) Determinar a região crítica da distribuição t de Student, sendo o número de graus de liberdade dado pela expressão (3.26), conforme Fig. 4.2.

5º) Calcular

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \quad (4.7)$$

6º) Conclusão

a) se  $t < -t_\alpha$  : rejeita-se  $H_0$

b) se  $t > t_{\alpha}$  : rejeita-se  $H_0$

c) se  $|t| > t_{\alpha/2}$  : rejeita-se  $H_0$

4º caso: Se os dados são emparelhados <sup>10</sup>

1º)  $H_0: \mu_1 - \mu_2 = d_0$

2º)  $H_1: \begin{cases} \text{a) } \mu_1 - \mu_2 < d_0 \\ \text{b) } \mu_1 - \mu_2 > d_0 \\ \text{c) } \mu_1 - \mu_2 \neq d_0 \end{cases}$

3º) Fixar o nível de significância  $\alpha$ .

4º) Determinar a região crítica através da distribuição t de Student com  $v = n - 1$  graus de liberdade, conforme Fig. 4.2.

5º) Calcular

$$t = \frac{\bar{d} - d_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad (4.8)$$

onde

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}, \text{ sendo } d_i = x_{1i} - x_{2i} \quad (4.9)$$

e

$$s = \sqrt{\frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n - 1}} \quad (4.10)$$

6º) Conclusão

- a) se  $t < -t_\alpha$  : rejeita-se  $H_0$
- b) se  $t > t_\alpha$  : rejeita-se  $H_0$
- c) se  $|t| > t_{\alpha/2}$  : rejeita-se  $H_0$ .

#### 4.5 Teste para a variância populacional $\sigma^2$

$$1º) H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$2º) H_1: \begin{cases} \text{a) } \sigma^2 < \sigma_0^2 \\ \text{b) } \sigma^2 > \sigma_0^2 \\ \text{c) } \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$$

3º) Fixar o nível de significância  $\alpha$ .

4º) Determinar a região crítica através da distribuição de  $\chi^2$  com  $v = n - 1$  graus de liberdade.

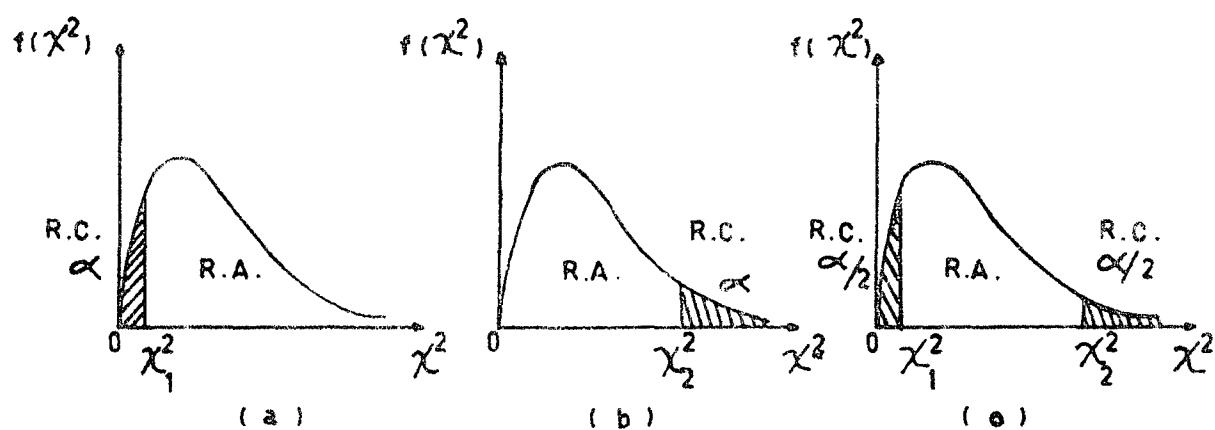


FIGURA 4.3

5º) Calcular

$$\chi^2 = \frac{(n - 1)s^2}{\sigma_0^2} \quad (4.11)$$

6º) Conclusão

- a) se  $\chi^2 < \chi_1^2$ : rejeita-se  $H_0$
- b) se  $\chi^2 > \chi_2^2$ : rejeita-se  $H_0$
- c) se  $\chi^2 < \chi_1^2$  ou  $\chi^2 > \chi_2^2$ : rejeita-se  $H_0$

#### 4.6 Teste para a igualdade de duas variâncias populacionais $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

1º)  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

2º)  $H_1: \begin{cases} \text{a) } \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \\ \text{b) } \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \\ \text{c) } \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$

3º) Fixar o nível de significância  $\alpha$ .

4º) Determinar a região crítica através da distribuição F de Snedecor com  $\nu_1 = n_1 - 1$  e  $\nu_2 = n_2 - 1$  graus de liberdade no numerador e denominador, respectivamente.

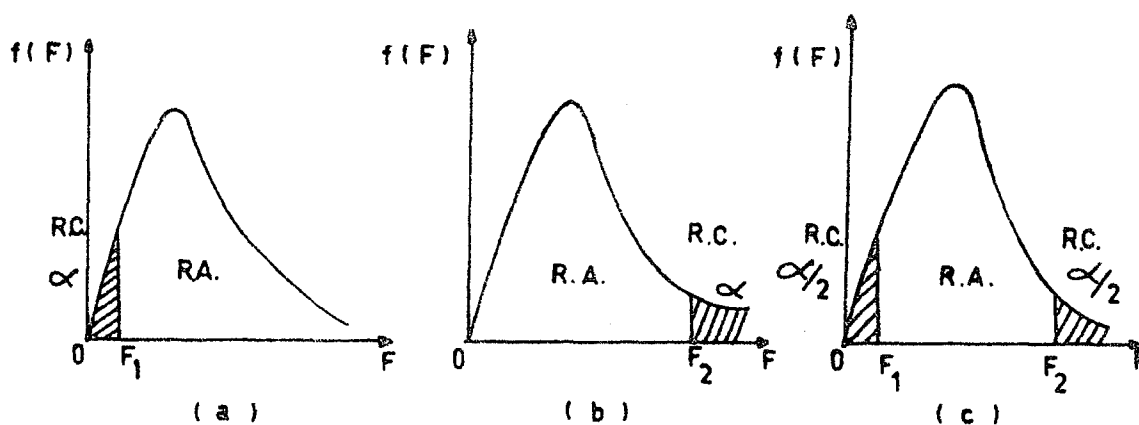


FIGURA 4.4

5º) Calcular

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad (4.12)$$

6º) Conclusão

a) se  $F < F_1$ : rejeita-se  $H_0$

b) se  $F > F_2$ : rejeita-se  $H_0$

c) se  $F < F_1$  ou  $F > F_2$ : rejeita-se  $H_0$

4.7 Teste para a igualdade de  $k$  ( $k > 2$ ) variâncias popula-  
cionais  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_k^2$

Se todas as amostras forem do mesmo tamanho, poderão ser usado o teste de Cochran, caso contrário, deve-se usar o teste de Bartlett [11]. O teste de Bartlett é descrito a seguir

1º)  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$

2º)  $H_1$ : pelo menos uma das variâncias seja diferente das demais

3º) Fixar o nível de significância  $\alpha$ .

4º) Determinar a região crítica através da distribuição de  $\chi^2$  com  $k-1$  graus de liberdade

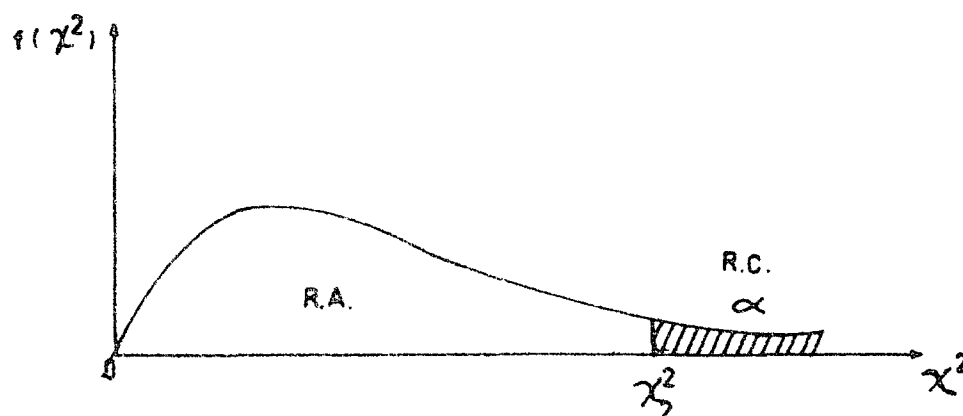


FIGURA 4.5

5º) Calcular

$$B = \frac{(n - k) \cdot \ln s^2 - \sum_{i=1}^k (v_i \cdot \ln s_i^2)}{C} = \frac{M}{C} \quad (4.13)$$

$$\text{onde: } M = (n - k) \cdot \ln s^2 - \sum_{i=1}^k (v_i \cdot \ln s_i^2) \quad (4.14)$$

$$n = \sum_{i=1}^k n_i \quad (4.15)$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k v_i s_i^2}{n - k} \quad (4.16)$$

$$C = 1 + \frac{\sum \left( \frac{1}{v_i} \right) - \frac{1}{n - k}}{3(k-1)} \quad (4.17)$$

sendo  $s_i^2$  e  $n_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) estimativas das variâncias e tamanho das amostras, respectivamente, e,

$$v_i = n_i - 1.$$

69) Conclusão

se  $B > \chi_2^2$ : rejeita-se  $H_0$ .



## CAPÍTULO 5

## COMPARAÇÃO DE VÁRIAS MÉDIAS

5.1 Introdução.

Dadas as amostras aleatórias provenientes de diferentes populações, diferindo algumas vezes nas condições experimentais, frequentemente deseja-se estimar as diferenças entre as médias dessas populações, ou, testar qualquer diferença existente entre as mesmas. Uma das técnicas usualmente utilizada é a chamada análise da variância (algumas vezes abreviada por ANOVA). Trata-se de uma generalização do teste para a diferença entre duas médias (teste "t") para o caso de compararmos simultaneamente  $k$  médias ( $k > 2$ ).

Na análise da variância a variação total de um conjunto é tratada como sendo divisível em dois componentes: variação dentro das amostras (ou residual) e variação entre as amostras. A variação dentro das amostras é representada pela dispersão dos dados brutos com relação à média dos grupos a que pertencem. A variação entre amostras é representada pela dispersão existente entre as médias das várias amostras.

Portanto, a ANOVA é um teste de médias, utilizando as variâncias, sendo que ela analisa as variações dentro e entre amostras.

5.2 Soma de quadrados

O conceito de soma de quadrados representa o passo inicial para medir a variação entre e dentro das amostras.

5.2.1 Esquema do modelo

Conforme o quadro 5.1.

Elementos das amostras	Amostras					
	$A_1$	$A_2$	...	$A_i$	...	$A_k$
j	$x_{11}$	$x_{21}$	...	$x_{i1}$	...	$x_{k1}$
	$x_{12}$	$x_{22}$	...	$x_{i2}$	...	$x_{k2}$
	.	.		.		.
	.	.		.		.
	$x_{1j}$	$x_{2j}$	...	$x_{ij}$	...	$x_{kj}$
	.	.		.		.
	.	.		.		.
	$x_{1n_1}$	$x_{2n_2}$	...	$x_{in_i}$	...	$x_{kn_k}$

Quadro 5.1

5.2.2 Soma de quadrados dentro das amostras (ou residual)

A soma de quadrados dentro das amostras (SQR) representa a soma dos quadrados dos afastamentos de cada valor bruto ( $x_{ij}$ ) em relação à média da amostra ( $\bar{x}_i$ ) que ele pertence, ou seja

$$SQR = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \quad (5.1)$$

### 5.2.3 Soma de quadrados entre amostras

A soma de quadrados entre amostras (SQE) representa a soma dos quadrados dos afastamentos de cada média amostral ( $\bar{x}_i$ ) em relação à média total ( $\bar{X}$ ), ou seja

$$SQE = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{x}_i - \bar{X})^2 \quad (5.2)$$

### 5.2.4 Soma total de quadrados

A soma total de quadrados (STQ) é representada pela soma dos afastamentos de cada valor bruto ( $x_{ij}$ ) em relação à média total ( $\bar{X}$ ), ou seja

$$SQT = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{X})^2 \quad (5.3)$$

Demonstra-se <sup>12</sup> que

$$SQT = SQE + SQR \quad (5.4)$$

### 5.3 Quadrado médio (ou média quadrática)

O valor da soma de quadrados tende a tornar-se maior à medida que a variação aumenta, já que a mesma representa uma medida de dispersão. Entretanto, a soma de quadrados também se torna maior com o aumento do tamanho da amostra. Como resultado, a soma de quadrados não pode ser considerada como uma medida de

variação "pura" inteiramente satisfatória, a menos que, é claro, possamos encontrar uma forma de controlar o número de dados envolvidos.

Felizmente, tal modo existe numa medida de variação conhecida por quadrado médio (variância), que se obtém através da divisão da SQR ou SQE pelo número de graus de liberdade correspondentes.

#### 5.4 Teste de hipóteses para a igualdade de k médias ( $k > 2$ )

No modelo que será visto, denominado de classificação única, são feitas as seguintes hipóteses: as k populações tem a mesma variância  $\sigma^2$  (condição de homocedasticidade) e a variável de interesse é normalmente distribuída em todas as populações.

O teste fica

$$1^\circ) H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = \mu$$

$$2^\circ) H_1: \text{pelo menos uma } \mu_i \neq \mu$$

3º) Fixar o nível de significância  $\alpha$ .

4º) Determinar a região de rejeição ou região crítica através da distribuição F de Snedecor com  $k-1$  e  $N-k$  graus de liberdade no numerador e denominador, respectivamente.

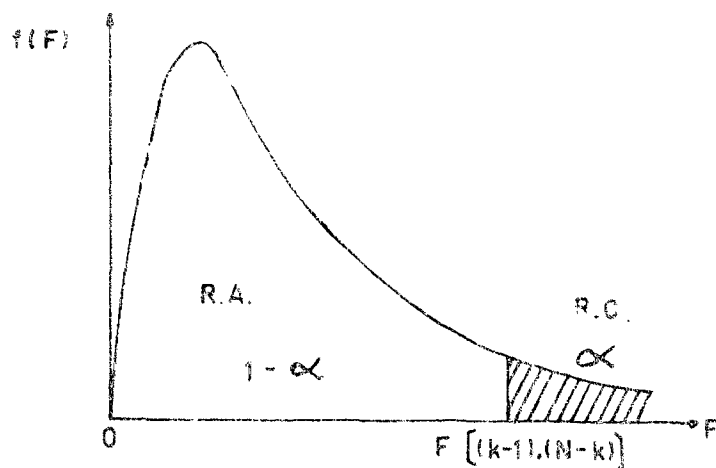


FIGURA 5.1

59) Cálculo de F amostral através do quadro da análise da variância (QAV).

QAV

Fonte de variação	Soma de quadrados	GL	Quadrado médio	F
Entre amostras	SQE	k-1	SQE/(k-1)	QME/QMR
Residual	SQR	N-k	SQR/(N-k)	
Total	SQT	N-1		

Quadro 5.2

onde: GL = graus de liberdade

QME = quadrado médio entre amostras

QMR = quadrado médio residual

N = número total de observações

k = número de amostras

As somas de quadrados podem ser calculadas através das seguintes fórmulas:

$$SQE = \sum_{i=1}^k n_i \left[ \frac{\left( \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \right)^2}{n_i} \right] - \frac{\left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \right)^2}{N} \quad (5.5)$$

$$SQR = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - \sum_{i=1}^k \left[ \frac{\left( \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \right)^2}{n_i} \right] \quad (5.6)$$

$$SQT = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \right)^2}{N} \quad (5.7)$$

onde:  $n_i$  = número de observações da  $i$ -ésima amostra.

69) Conclusão: se  $F > F [(k-1), (N-k)]$ , rejeita-se  $H_0$ .

## CAPÍTULO 6

## ESTATÍSTICA NÃO-PARAMÉTRICA

6.1 Métodos não-paramétricos

Os métodos não-paramétricos são métodos estatísticos que podem ser aplicados a diferentes distribuições, em contraste com os métodos paramétricos os quais são válidos apenas para uma distribuição específica, como por exemplo, a distribuição normal. Os métodos não-paramétricos são aplicáveis nos casos em que a distribuição da população é desconhecida.

6.2 Testes não-paramétricos

Um teste estatístico não-paramétrico é um teste cujo modelo não especifica condições sobre os parâmetros da população da qual se extraiu a amostra. Há certas suposições básicas associadas à maioria das provas não-paramétricas, isto é, que as observações sejam independentes e que a variável em estudo seja contínua, mas essas suposições são em menor número e mais fracas do que as associadas às provas paramétricas. Além disso, os testes não-paramétricos não exigem mensurações tão detalhadas quanto as provas paramétricas; a maior parte dos testes não-paramétricos se aplica a dados em escala ordinal (ordenados).

6.3 Descrição de alguns testes não-paramétricos6.3.1 Testes de aleatoriedade

Quando um pesquisador deseja tirar alguma conclusão sobre determinada população, através das informações proporcionadas por uma amostra da mesma, então essa amostra deve ser aleatória. Existem inúmeras técnicas que permitem comprovar se uma amostra é aleatória. Essas técnicas se baseiam na ordem ou sequência em que os escores individuais foram obtidos individualmente.

Serão vistos dois testes de aleatoriedade: o teste de iterações e o teste de tendência.

#### 6.3.1.1 Teste de iterações

Essa técnica baseia-se no número de iterações que uma amostra apresenta. Uma iteração é definida como uma sucessão de símbolos idênticos que aparecem seguidos e precedidos por símbolos diferentes (ou por nenhum símbolo).

Suponha-se, por exemplo, uma série de sinais "mais" e "menos" (representando os sinais das diferenças em relação à mediana, para um certo conjunto de observações) na seguinte ordem:

- - - + + - + + + - - +

A amostra começa com uma iteração de três sinais "menos". Segue-se uma iteração de dois "mais", etc. Esses escores poderão ser agrupados por iterações, numerando cada sucessão de símbolos idênticos:

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| - | - | - | + | + | - | + | + | + | - | - | + |
|   |   |   | 1 | 2 | 3 | 4 |   |   | 5 | 6 |   |

Verifica-se então um total (r) de 6 iterações.

Esse número total de iterações em uma amostra de qualquer tamanho dá uma indicação sobre se a amostra é aleatória ou



não. Se ocorrem muito poucas iterações, sugere-se uma certa tendência temporal, ou acumulação de valores devido à falta de independência. Por outro lado, se aparece um grande número de iterações, o fato pode ser devido à influência de flutuações cíclicas de períodos curtos.

Como a distribuição amostral dos valores de  $r$  que se pode esperar de amostras aleatórias repetidas é conhecida, utilizando essa distribuição amostral, poder-se-á decidir se determinada amostra observada apresenta mais, ou menos iterações, do que provavelmente ocorreriam em uma amostra aleatória.

Seja  $n_1$  o número de elementos de uma categoria e  $n_2$  o número de elementos da outra categoria. Isto é,  $n_1$  poderia ser o número de sinais - e  $n_2$  o número de sinais +. O número total dos eventos observados será  $N$ , ou seja  $N = n_1 + n_2$ .

A hipótese a ser testada é  $H_0$ : a amostra é aleatória, contra a alternativa  $H_1$ : a amostra não é aleatória.

Se  $n_1$  e  $n_2 \leq 20$ , vários textos <sup>[13]</sup>, <sup>[14]</sup>, <sup>[15]</sup> fornecem tabelas com os valores críticos de  $r$  sob  $H_0$  para  $\alpha = 0,05$ . Estes são valores críticos extraídos da distribuição amostral de  $r$  sob  $H_0$  (isto é, supondo que a hipótese básica é verdadeira). Se o valor observado de  $r$  está entre os valores críticos, aceita-se  $H_0$ . Se o valor observado de  $r$  é igual ou maior que um dos valores críticos, rejeita-se  $H_0$ .

Para  $n_1$  ou  $n_2$  maiores do que 20, não se pode utilizar a tabela mencionada acima. Para esse caso, a distribuição amostral de  $r$  é aproximadamente normal, com média  $\mu_r$  e desvio  $\sigma_r$ , sendo <sup>[16]</sup>

$$\mu_r = \frac{2n_1n_2}{n_1+n_2} + 1 \quad (6.1)$$

e

$$\sigma_r = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{\sqrt{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)}} \quad (6.2)$$

Assim, para  $n_1$  ou  $n_2 > 20$ ,  $H_0$  pode ser testada por meio da variável padronizada

$$z_r = \frac{r - \mu_r}{\sigma_r} \quad (6.3)$$

### 6.3.1.2 Teste de tendência (teste de estacionalidade)

No contexto desta tese preservamos os nomes clássicos de teste de tendência e de aleatoriedade, mas na verdade são testes de estacionalidade.

Sendo realizadas  $n$  observações:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , representadas na ordem em que foram obtidas, de uma variável aleatória  $X$ , define-se a estatística.

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2}{n-1} \quad (6.4)$$

A estatística  $\delta^2$  pode ser usada para determinar a existência de tendência das observações; neste caso deve-se testar se  $\delta^2$  difere significativamente de

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad (6.5)$$

a qual estima a variância independentemente da ordem das observações, e conseqüentemente inclui o efeito de tendência.

Demonstra-se [17] que a variável aleatória

$$z_\eta = \frac{1 - (\eta/2)}{\sqrt{\frac{n-2}{n^2-1}}} \quad (6.6)$$

para  $n > 10$ , segue aproximadamente uma distribuição normal padronizada, sendo

$$\eta = \frac{\delta^2}{s^2} \quad (6.7)$$

Qualitativamente, pequenos valores negativos e grandes valores positivos de  $z_\eta$  correspondem a um comportamento não-aleatório das observações.

### 6.3.2 Testes de normalidade

Para testar a normalidade de uma distribuição serão descritos dois testes: o teste qui-quadrado e o teste de Kolmogorov-Smirnov.

### 6.3.2.1 Teste de qui-quadrado

O teste consiste no cálculo da estatística  $\chi^2$ , definida por

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} \quad (6.8)$$

onde  $k$  representa o número de classes em que as observações foram divididas,  $p_i$  a probabilidade da  $i$ -ésima classe (quando a distribuição postulada for normal),  $N_i$  a frequência observada da  $i$ -ésima classe,  $n$  a frequência total ou tamanho da amostra, e  $np_i$  a frequência esperada na  $i$ -ésima classe.

Um critério utilizado para especificar o número de classes ( $k$ ) é através da expressão empírica devida a Sturges

$$k = 1 + 3,3 \cdot \log n \quad (6.9)$$

O número de graus de liberdade dessa distribuição, no caso da normal, como demonstra Chernoff e Lehmann [18], é um número entre  $k-1$  e  $k-3$ .

Para valores de  $\chi^2$  calculados pela (6.8) maiores que os correspondentes valores teóricos, no nível de significância considerado, rejeita-se a hipótese de normalidade da distribuição.

### 6.3.2.2 Teste de Kolmogorov-Smirnov

O teste de Kolmogorov-Smirnov é adequado somente para distribuições contínuas, e a rigor, quando a distribuição é

completamente especificada (isto é, quando os parâmetros são conhecidos) <sup>[19]</sup>. A hipótese a ser testada é que uma certa função  $F_X(x)$  é a função distribuição de uma população da qual a amostra  $x_1, x_2, \dots, x_n$  foi tomada.

As etapas desse teste são:

1º) Calcular os valores da função de distribuição amostral

$F_X(x)$  para a amostra  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . A função de distribuição amostral  $F_X(x)$  é definida como a relação entre o número de observações menores ou iguais a  $x$  e o número total de observações.

2º) Determinar o desvio máximo

$$d = \max \left| \tilde{F}_X(x) - F_X(x) \right| \quad (6.10)$$

entre  $\tilde{F}_X(x)$  e  $F_X(x)$ .

A função de distribuição amostral  $\tilde{F}_X(x)$  é uma função em degraus, de modo que  $d$  deve corresponder a um ponto de descontinuidade, como mostra a figura 6.1

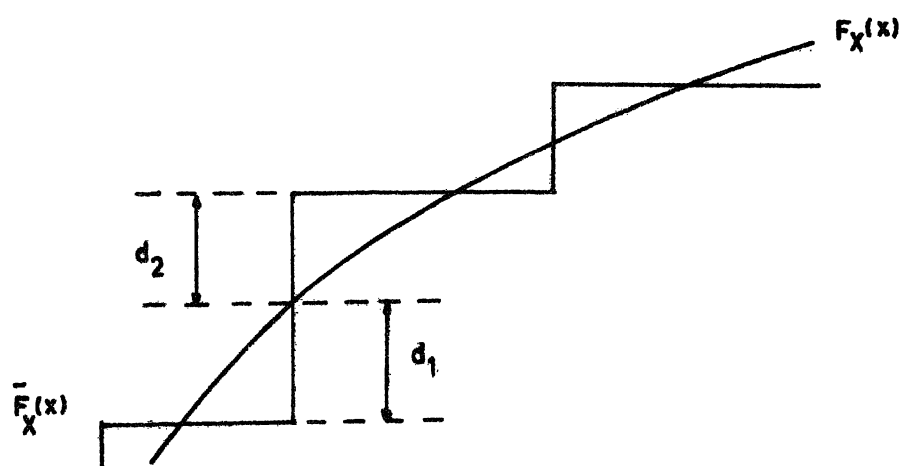


FIGURA 6.1

Para cada ponto deve-se calcular os dois números não-negativos  $d_1$  e  $d_2$ . O maior dos números é  $d$ .

39) Fixar o nível de significância  $\alpha$ .

40) Determinar a solução  $c$  da equação

$$P(D \leq c) = 1 - \alpha \quad (6.11)$$

onde  $c$  é obtido através de tabelas existentes em vários textos  $|^{20}|, |^{21}|, |^{22}|$ . Se  $d \leq c$ , não rejeitar a hipótese de normalidade. Se  $d > c$ , rejeitar a hipótese de normalidade.

Kolmogorov e Smirnov  $|^{23}|$  provaram que a distribuição da variável aleatória  $D$  independe da forma específica de  $F(x)$ , sendo a mesma para todas as distribuições contínuas.

### 6.3.3 Teste de Wilcoxon

Esse teste será utilizado para testar a hipótese nula  $H_0$  de que a distribuição de uma variável aleatória  $X$  é simétrica em torno de zero.

As etapas deste teste são:

19) Ordenar os valores absolutos da amostra de  $X$ , em ordem crescente, atribuindo postos (que são representados pelos números  $1, 2, \dots, n$ , colocados em correspondência com os  $n$  valores absolutos amostrais, dispostos em ordem crescente) a esses valores. Pode ocorrer que duas ou mais observações tenham o mesmo valor. Nos casos de empates (quando ocorrem observações iguais, em valores absolutos) é atribuído o mesmo posto. Esse posto é a média dos postos que teriam sido atribuídos se os valores fossem ligeiramente

diferentes. Assim é que se três valores são iguais a -2, 2 e 2, a cada um seria atribuído o posto 2, pois  $(1+2+3)/3=2$ . O próximo valor, pela ordem, receberia o posto 4, porque já foram utilizados os postos 1, 2 e 3.

- 2º) Atribuir aos postos os sinais dos valores observados correspondentes.
- 3º) Determinar as somas dos postos de mesmos sinais.
- 4º) Escolher a menor dessas somas ( $s$ ), em valor absoluto, e calcular a estatística  $|z_s|$

$$z_s = \frac{s - \mu_s}{\sigma_s} \quad (6.12)$$

onde a média  $\mu_s$  é dada por

$$\mu_s = \frac{n(n+1)}{4} \quad (6.13)$$

e a variância  $\sigma_s^2$  por

$$\sigma_s^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} - \sum \frac{t_j^3 - t_j}{48} \quad (6.14)$$

sendo  $n$  o tamanho da amostra e  $t_j$  o número de coincidências para cada valor amostral absoluto, por exemplo, para os postos: 1; 2,5; 2,5; 4; 5; 7; 7 e 7, tem-se :  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$ ,  $t_3 = 1$ ,  $t_4 = 1$  e  $t_5 = 3$ . O somatório é estendido a todas

coincidências que ocorrerem na amostra.

A estatística  $z_g$  tende assintoticamente para uma distribuição normal padronizada. Na prática essa aproximação pode ser usada para  $n > 25$

O teste é do tipo unilateral esquerdo, pois será tomada a menor das somas (em valor absoluto) dos postos de mesmos sinais.

#### 6.3.4 Teste $P_\lambda$ de Pearson

O teste  $P_\lambda$  de Pearson procura estabelecer se os resultados dos testes realizados sobre diversas amostras, provenientes de uma determinada população, mostram o comportamento geral da população ou se, ao contrário, eles correspondem a efeitos locais.

Seja  $X$  uma variável aleatória (aqui, a estatística do teste) com função distribuição

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du \quad (6.15)$$

e seja

$$z = -2 \cdot \ln F_X(x) \quad (6.16)$$

demonstra-se [25] que  $z$  tem uma distribuição do tipo  $\chi^2$  com 2 graus de liberdade.



Considerando-se um conjunto de  $k$  variáveis aleatórias independentes  $X_i$ , a estatística

$$P_\lambda = z_1 + z_2 + \dots + z_k \quad (6.17)$$

tem uma distribuição do tipo  $\chi^2$  com  $2k$  graus de liberdade.

O teste de hipótese é do tipo unilateral direito, ou seja, para valores de  $P_\lambda$  maiores que o valor crítico  $\chi^2_{2k}$  rejeita-se a hipótese nula  $H_0$ .

#### 6.3.5 Teste de Kruskal-Wallis

É um teste extremamente útil para decidir se  $k$  amostras independentes provêm de populações diferentes. Os valores amostrais quase que invariavelmente diferem entre si, e o problema é decidir se essas diferenças entre as amostras significam diferenças efetivas entre as populações, ou se representam apenas variações casuais, que podem ser esperadas entre amostras aleatórias de uma mesma população.

Nesse teste, cada uma das  $N$  observações é substituída por um posto. Portanto, todas as observações de todas as  $k$  amostras combinadas são dispostas em uma única série, em ordem crescente, e atribui-se os postos  $1, 2, \dots, N$ .

O teste é baseado no cálculo da estatística  $|^{26}|$

$$H = \frac{\frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)}{1 - \frac{\sum (t_j^3 - t_j)}{N^3 - N}} \quad (6.18)$$

que é aproximadamente distribuída como um  $\chi^2$  com  $k-1$  graus de liberdade para  $n_i > 5$  e  $k > 3$ , sendo  $n_i$  o número de observações da  $i$ -ésima amostra,  $R_i$  a soma dos postos correspondentes à  $i$ -ésima amostra e  $t_j$  o número de coincidências entre os postos (postos empatados).

Para valores de  $H$  maiores que o valor crítico  $\chi^2_{k-1}$ , no nível de significância considerado, rejeita-se a hipótese nula  $H_0$  de que as  $k$  amostras provêm de uma mesma população.

## CAPÍTULO 7

ESCOLHA DA VARIÁVEL ALEATÓRIA E A  
REDE DE NIVELAMENTO BRASILEIRA DE 1ª ORDEM

7.1 Introdução

Os erros de uma rede de nivelamento de 1ª ordem, mostram um comportamento excepcional quando comparado com os de outras medidas topográficas devido a efeitos sistemáticos que surgem e que não são facilmente interpretáveis.

Muitas pesquisas foram realizadas para melhor se conhecer esses erros, sendo que mais modernamente eles tem sido estudados sob o ponto de vista estatístico [27], [28], [29], [30], [31], [32], [33], [34], [35], [36], mostrando resultados promissores.

7.2 A variável aleatória  $X_{ij}$ 

Sabe-se, da teoria clássica, que o erro provável bruto por quilômetro é dado por [37]

$$u_R^2 = \frac{1}{9} \frac{\sum \rho^2}{\sum R} \quad (7.1)$$

onde:  $u_R$  - erro provável bruto por quilômetro

$\rho$  - discrepância, em milímetros, entre os resultados dos nivelamentos de ida e volta de uma seção

R - afastamento, em quilômetro, entre duas RN consecutivas (seção)

$\Sigma \rho^2$  - soma dos quadrados das discrepâncias

$\Sigma R$  - soma dos afastamentos

No caso de uma seção, a (7.1) fica

$$u_R^2 = \frac{1}{9} \frac{\rho^2}{R} \quad (7.2)$$

que nos demonstra a conveniência em estudar a variável aleatória  $|^3|$

$$X_{ij} = \frac{\rho_{ij}}{\sqrt{R_{ij}}} \quad (7.3)$$

onde  $\rho_{ij}$  é a discrepância e  $R_{ij}$  o afastamento entre duas RN consecutivas da j-ésima seção e i-ésima linha.

### 7.3 A rede de nivelamento brasileira de 1ª ordem

#### 7.3.1 Generalidades

O nivelamento de alta precisão ou de 1ª ordem é aquele em que o erro provável total não ultrapassa dois milímetros por quilômetro. Para os modernos níveis, a AIG recomenda a título experimental, que o erro provável seja inferior a 1,5mm por quilômetro.

A rede de nivelamento brasileira de 1ª ordem tem uma

extensão de 90 202 km, tendo estabelecidas 40 937 RNs e 9 marégrafos (IBGE-1980).

Neste trabalho, será analisada uma rede parcial do nivelamento brasileiro de 1ª ordem.

### 7.3.2 Descrição da rede parcial

O croqui da rede parcial a ser analisada é mostrado na figura 7.1, estando localizada nos estados do Maranhão e Piauí. Esta rede é composta de 5 circuitos (nº 122, 123, 129, 130 e 134), com uma extensão total de 1 915,87 km e 648 seções.

Para a análise a ser executada, a rede parcial foi dividida em 20 linhas (conjunto de seções compreendidas entre dois pontos nodais), com as características dadas pelo quadro 7.1.

As figuras 7.2, 7.3, 7.4, 7.5 e 7.6 mostram isoladamente cada um dos cinco circuitos da rede parcial, identificando as linhas e os circuitos adjacentes.

| Nº<br>DA<br>LINHA | CIR-<br>CUITO<br>Nº | Nº DE<br>SEÇÕES | EXTENSÃO<br>DAS LINHAS<br>(km) |
|-------------------|---------------------|-----------------|--------------------------------|
| 01                | 134                 | 26              | 79,16                          |
| 02                | 134                 | 50              | 136,62                         |
| 03                | 130                 | 26              | 75,13                          |
| 04                | 132                 | 36              | 104,85                         |
| 05                | 129                 | 20              | 58,58                          |
| 06                | 129                 | 30              | 89,60                          |
| 07                | 129                 | 74              | 211,73                         |
| 08                | 118                 | 24              | 69,59                          |
| 09                | 122                 | 32              | 87,24                          |
| 10                | 123                 | 60              | 167,99                         |
| 11                | 130                 | 25              | 68,88                          |
| 12                | 129                 | 21              | 60,49                          |
| 13                | 124                 | 23              | 63,52                          |
| 14                | 123                 | 16              | 46,59                          |
| 15                | 123                 | 33              | 98,57                          |
| 16                | 120                 | 28              | 81,68                          |
| 17                | 119                 | 46              | 137,56                         |
| 18                | 121                 | 31              | 93,32                          |
| 19                | 122                 | 47              | 132,95                         |
| 20                | 122                 | 19              | 51,82                          |
| TOTAL             | -                   | 648             | 1.915,87                       |

Quadro 7.1

Os quadros 7.2, 7.3 e 7.4 mostram os comprimentos das seções (em km) e as discrepâncias parciais (em mm) para um circuito completo, o de nº 130. Os dados referentes aos demais circuitos estão gravados em fitas magnéticas.

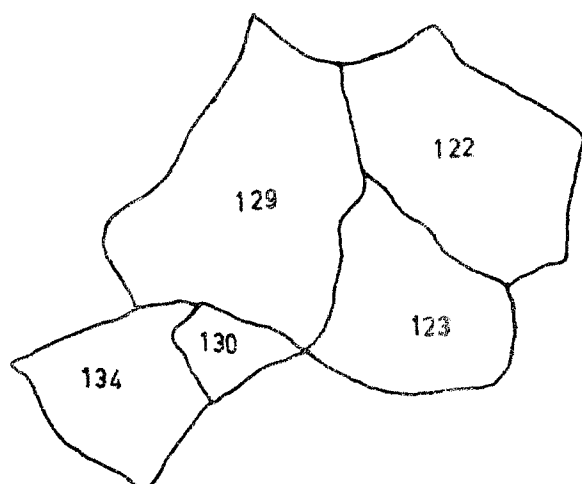


FIGURA 7.1

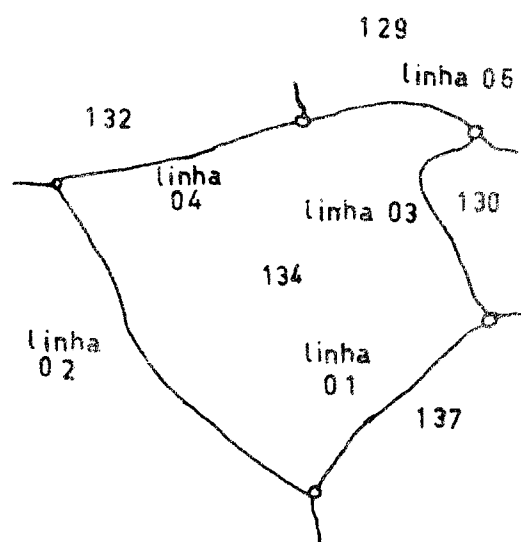


FIGURA 7.2

As figuras 7.2, 7.3, 7.4, 7.5 e 7.6, mostram cada um dos cinco circuitos isoladamente, indicando o número de ordem para as linhas.

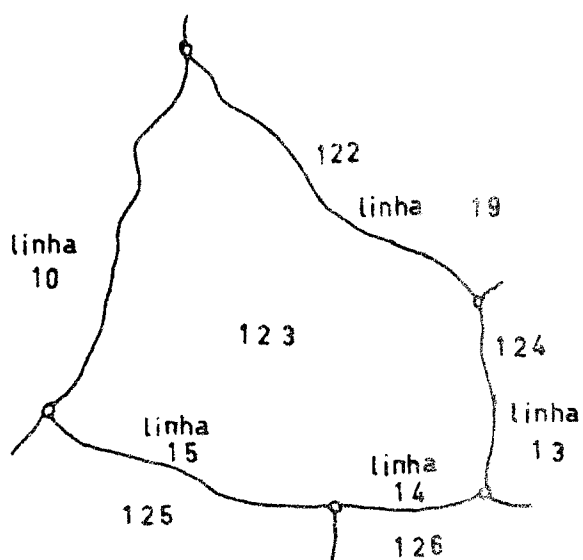


FIGURA 7.3

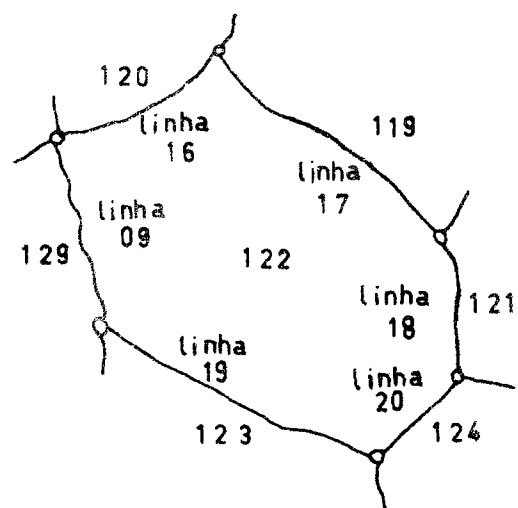


FIGURA 7.4

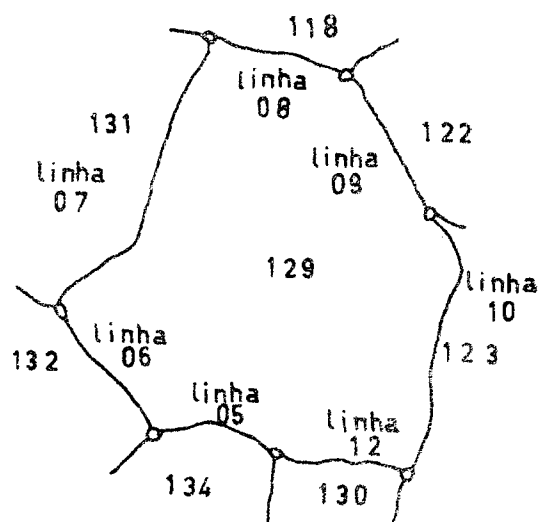


FIGURA 7.5

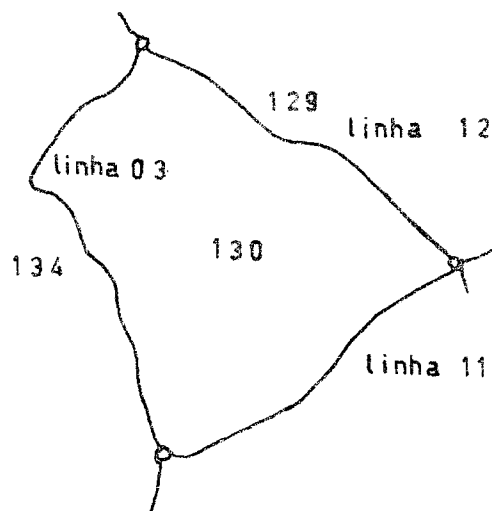


FIGURA 7.6

| LINHA Nº 12 |                   |                  |
|-------------|-------------------|------------------|
| SEÇÃO Nº    | DISCREPÂNCIA (mm) | COMPRIMENTO (km) |
| 01          | -1,7              | 1,90             |
| 02          | 0,0               | 1,00             |
| 03          | -0,8              | 2,67             |
| 04          | -1,5              | 2,94             |
| 05          | 5,9               | 2,97             |
| 06          | 2,7               | 2,99             |
| 07          | -2,6              | 2,95             |
| 08          | 5,1               | 2,99             |
| 09          | 6,3               | 3,23             |
| 10          | -4,8              | 2,80             |
| 11          | 6,2               | 3,09             |
| 12          | -1,3              | 3,16             |
| 13          | 2,0               | 3,03             |
| 14          | -3,6              | 3,00             |
| 15          | -2,4              | 2,91             |
| 16          | -3,4              | 2,80             |
| 17          | 4,6               | 2,94             |
| 18          | 2,1               | 3,16             |
| 19          | 4,1               | 2,89             |
| 20          | 1,8               | 3,23             |
| 21          | -0,6              | 3,84             |

Quadro 7.2



| LINHA Nº 11 |                   |                  |
|-------------|-------------------|------------------|
| SEÇÃO Nº    | DISCREPÂNCIA (mm) | COMPRIMENTO (km) |
| 01          | 1,2               | 2,80             |
| 02          | 5,1               | 3,28             |
| 03          | 1,8               | 2,88             |
| 04          | 4,0               | 2,27             |
| 05          | -1,9              | 0,97             |
| 06          | 1,9               | 2,45             |
| 07          | -4,6              | 3,67             |
| 08          | -2,6              | 2,03             |
| 09          | 3,8               | 2,94             |
| 10          | -1,2              | 2,26             |
| 11          | 1,9               | 3,05             |
| 12          | 4,5               | 2,94             |
| 13          | -3,5              | 2,99             |
| 14          | -2,8              | 2,62             |
| 15          | -5,8              | 3,06             |
| 16          | -5,0              | 2,86             |
| 17          | 6,0               | 2,87             |
| 18          | 0,1               | 3,04             |
| 19          | -0,7              | 2,87             |
| 20          | 1,0               | 3,10             |
| 21          | -5,6              | 2,82             |
| 22          | 5,3               | 2,91             |
| 23          | -0,7              | 3,24             |
| 24          | 1,2               | 2,46             |
| 25          | 4,0               | 2,50             |

Quadro 7.3

| LINHA Nº 03 |                   |                  |
|-------------|-------------------|------------------|
| SEÇÃO Nº    | DISCREPÂNCIA (mm) | COMPRIMENTO (km) |
| 01          | -1,6              | 2,41             |
| 02          | -3,9              | 3,03             |
| 03          | -0,7              | 2,56             |
| 04          | -0,6              | 3,01             |
| 05          | -5,6              | 3,03             |
| 06          | 6,1               | 3,08             |
| 07          | 4,4               | 2,95             |
| 08          | -4,5              | 2,92             |
| 09          | 1,3               | 2,80             |
| 10          | -2,0              | 3,02             |
| 11          | -7,0              | 3,15             |
| 12          | -3,3              | 3,03             |
| 13          | 5,5               | 2,65             |
| 14          | 6,2               | 2,68             |
| 15          | -2,9              | 2,00             |
| 16          | -7,3              | 4,08             |
| 17          | 3,7               | 3,14             |
| 18          | 1,8               | 2,71             |
| 19          | 0,1               | 3,05             |
| 20          | 2,1               | 2,91             |
| 21          | -4,7              | 2,99             |
| 22          | 2,2               | 2,93             |
| 23          | -6,5              | 3,24             |
| 24          | -2,9              | 3,01             |
| 25          | 3,1               | 2,99             |
| 26          | -0,3              | 1,76             |

Quadro 7.4

#### 7.4 Métodos de análise

Definida a variável aleatória  $X_{ij}$ , cada linha será testada isoladamente, bem como todo o conjunto.

Os métodos de análise empregados serão, em geral, testes não-paramétricos.

Como a aplicação desses testes utiliza grande volume de cálculos, os mesmos foram executados com o auxílio de computador (DEC System 10). As listagens dos programas utilizados estão no apêndice.

## CAPÍTULO 8

## APLICAÇÕES DOS TESTES DE ALEATORIEDADE

8.1 Introdução

Foram executados dois testes de aleatoriedade: o de iterações e o de tendência. Esses testes foram aplicados em todas as 20 linhas componentes dos 5 circuitos de nivelamento.

O teste de aleatoriedade possibilitará a exclusão para os demais testes, das linhas de nivelamento que não apresentarem características aleatórias. Se em pelo menos um dos testes o resultado for significativo, a linha será considerada não-aleatória.

8.2 Teste de iterações8.2.1 Generalidades

Para a aplicação desse teste, foi calculada, para cada linha, a mediana ( $m_i$ ) da variável  $X_{ij}$  e o número  $n_1$  de iterações (aqui, seqüências de valores acima e abaixo da mediana).

Como o número de observações abaixo ( $n_1$ ) é igual ao número de observações acima ( $n_2$ ) da mediana, então deve-se fazer em (6.1) e (6.2),  $n_1 = n_2 = n$ , obtendo-se

$$\mu_r = 1 + n \quad (8.1)$$

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{n(n-1)}{2n-1}} \quad (8.2)$$

No caso de  $n > 20$ , a distribuição da estatística (6.3) é aproximadamente normal padronizada. A estatística (6.3) foi calculada para todas as linhas, pois a maioria delas apresentam  $n > 20$ , ou pelo menos próximo desse valor limite (linhas nº 5, 14 e 20).

Para testar a hipótese nula de aleatoriedade dos  $x_{ij}$ , linha por linha, será utilizado o nível de significância de 5% e um teste do tipo unilateral esquerdo, pois, pesquisas já realizadas tem mostrado uma tendência das discrepâncias  $p_{ij}$  se agruparem em seqüências de mesmo sinal <sup>[39]</sup>.

#### 8.2.2 Resumo dos resultados

Os resultados do teste de iterações estão resumidos no quadro 8.1. Ver a análise dos resultados no item 8.4.

| Nº DA<br>LINHA | $m_i$    | $r_i$ | $\mu_r$ | $\sigma_r$ | $z_r$  | $z_c$<br>(crítico) |
|----------------|----------|-------|---------|------------|--------|--------------------|
| 01             | -0,06262 | 14    | 14      | 2,4980     | 0,000  | -1,644             |
| 02             | 0,11785  | 28    | 26      | 3,4993     | 0,572  | -1,644             |
| 03             | -0,39167 | 14    | 14      | 2,4980     | 0,000  | -1,644             |
| 04             | -0,34891 | 16    | 19      | 2,9568     | -1,015 | -1,644             |
| 05             | 0,40157  | 11    | 11      | 2,1764     | 0,000  | -1,644             |
| 06             | 0,05789  | 15    | 16      | 2,6910     | -0,372 | -1,644             |
| 07             | 0,53340  | 32    | 38      | 4,2716     | -1,405 | -1,644             |
| 08             | -0,63845 | 12    | 13      | 2,3956     | -0,417 | -1,644             |
| 09             | 0,98857  | 14    | 17      | 2,7824     | -1,078 | -1,644             |
| 10             | 0,41025  | 25    | 31      | 3,8400     | -1,562 | -1,644             |
| 11             | 0,56796  | 13    | 13      | 2,3956     | 0,000  | -1,644             |
| 12             | 0,00000  | 11    | 11      | 2,1764     | 0,000  | -1,644             |
| 13             | -0,05735 | 9     | 12      | 2,2887     | -1,311 | -1,644             |
| 14             | 0,36881  | 6     | 9       | 1,9322     | -1,553 | -1,644             |
| 15             | 0,34188  | 17    | 17      | 2,7824     | 0,000  | -1,644             |
| 16             | -0,50246 | 13    | 15      | 2,5963     | -0,770 | -1,644             |
| 17             | -0,22812 | 23    | 24      | 3,3533     | -0,298 | -1,644             |
| 18             | -0,27821 | 14    | 16      | 2,6910     | -0,743 | -1,644             |
| 19             | 1,49366  | 28    | 24      | 3,5333     | 1,193  | -1,644             |
| 20             | -0,17292 | 3     | 10      | 2,0580     | -3,401 | -1,644             |

Quadro 8.1

### 8.3 Teste de tendência (teste de estacionalidade)

#### 8.3.1 Generalidades

Esse teste foi aplicado calculando-se para cada linha a estatística (6.4), ou seja, em termos da variável  $x_{ij}$

$$s^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} (x_{i,j+1} - x_{ij})^2}{n - 1} \quad (8.3)$$

No cálculo de  $\eta$ , de acordo com Von Neumann [40], foi utilizado o estimador de máxima verossimilhança da variância ( $s^2$ ).

Para todas as linhas foi calculada a estatística  $z_\eta$  (6.6) que tem aproximadamente uma distribuição normal padronizada para  $n > 10$ , o que acontece para as 20 linhas testadas, pois a linha com menor número de observações é a nº 14 (com um total de 16 observações).

No teste da hipótese nula de aleatoriedade dos  $x_{ij}$ , foi utilizado o nível de significância de 5% e um teste do tipo unilateral direito, em consequência, a região de rejeição é dada pelo intervalo  $(1,644; +\infty)$ . O teste é do tipo unilateral pelas mesmas razões vistas no teste de iterações.

#### 8.3.2 Resumo dos resultados

Os resultados do teste de tendência estão resumidos no quadro 8.2. Ver a análise dos resultados no item 8.4 .

| Nº DA<br>LINHA | $\bar{x}$ | $s^2$   | $\delta^2$ | $\eta$  | $z_\eta$ | $z_c$ |
|----------------|-----------|---------|------------|---------|----------|-------|
| 01             | -0,02488  | 3,03084 | 4,82797    | 1,59295 | -1,079   | 1,644 |
| 02             | -0,01198  | 3,05327 | 5,49503    | 1,79972 | 0,723    | 1,644 |
| 03             | -0,35612  | 5,32077 | 11,55334   | 2,17137 | -0,454   | 1,644 |
| 04             | -0,11518  | 2,43744 | 5,06945    | 2,07982 | -0,246   | 1,644 |
| 05             | 0,30745   | 4,68345 | 9,49437    | 2,02722 | -0,064   | 1,644 |
| 06             | 0,06477   | 3,53491 | 6,46608    | 1,82921 | 0,484    | 1,644 |
| 07             | 0,25435   | 3,02797 | 5,72099    | 1,88938 | 0,482    | 1,644 |
| 08             | -0,60888  | 3,79250 | 6,33089    | 1,66932 | 0,845    | 1,644 |
| 09             | 0,80861   | 2,54504 | 3,94087    | 1,54845 | 1,318    | 1,644 |
| 10             | 0,17186   | 3,40178 | 6,00890    | 1,76640 | 0,920    | 1,644 |
| 11             | 0,15374   | 4,46848 | 9,95585    | 2,22802 | -0,594   | 1,644 |
| 12             | 0,46945   | 3,99014 | 9,88459    | 2,47725 | -1,148   | 1,644 |
| 13             | -0,57560  | 2,98800 | 6,60423    | 2,21025 | -0,577   | 1,644 |
| 14             | 0,37863   | 6,09545 | 7,92215    | 1,29968 | 1,494    | 1,644 |
| 15             | 0,27612   | 4,02184 | 8,48140    | 2,10883 | -0,322   | 1,644 |
| 16             | -0,47455  | 4,39001 | 8,67166    | 1,97532 | 0,068    | 1,644 |
| 17             | -0,12701  | 3,15599 | 5,26776    | 1,66913 | 1,147    | 1,644 |
| 18             | 0,36800   | 4,47154 | 9,43629    | 2,11030 | -0,317   | 1,644 |
| 19             | 1,06798   | 3,26565 | 8,09831    | 2,47985 | -1,681   | 1,644 |
| 20             | -0,21630  | 1,77728 | 1,84363    | 1,03733 | 2,215    | 1,644 |

Quadro 8.2



#### 8.4 Análise dos resultados

O teste de iterações para a aleatoriedade mostrou que, apenas para a linha nº 20, a estatística correspondente cai na R.R., ao nível de significância de 5%, sendo o resultado altamente significativo, pois

$$P(z_r < -3,401) = 0,00033$$

A figura 8.1 mostra qualitativamente a não-aleatoriedade dos valores de  $x_{ij}$  para a linha nº 20.

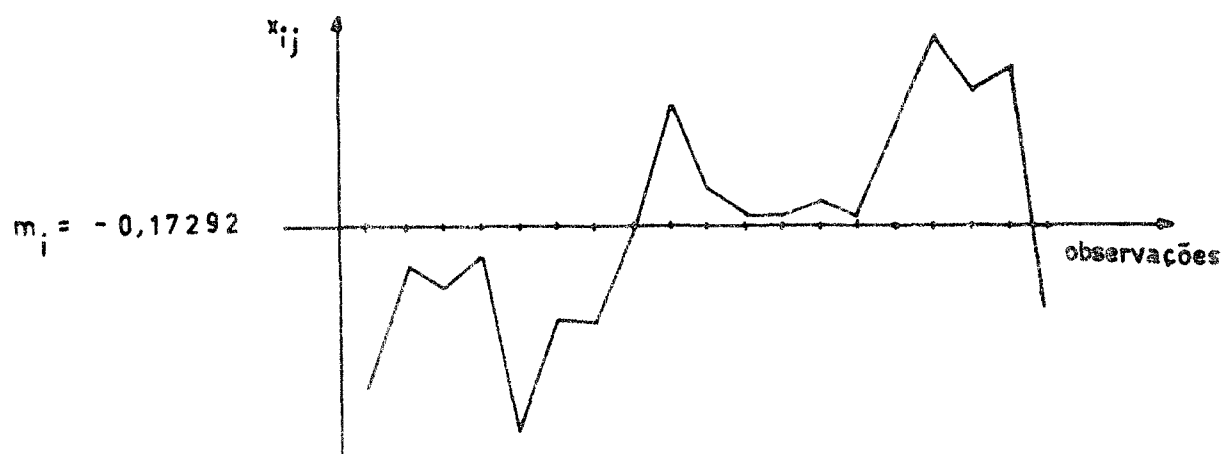


FIGURA 8.1

Para a linha nº 10 o teste de iterações mostrou que

$$P(z_r < -1,562) = 0,05938$$

e para a linha nº 14 o resultado seria

$$P(z_r < -1,553) = 0,0606$$

Portanto, considerando-se um nível de significância pouco acima de 5%, os resultados para essas duas linhas seriam também significativos.

O resultado do teste de tendência confirma o resultado obtido pelo teste de iterações, mostrando que realmente a linha nº 20 tem um comportamento não-aleatório. O resultado obtido foi

$$P(z > 2,22) = 0,03020$$

significativo como mostra a figura 8.2

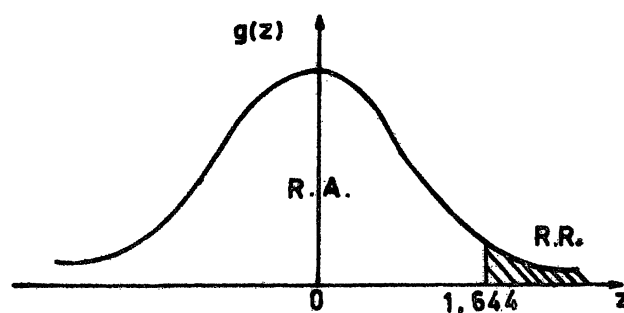


FIGURA 8.2

Assim, considerando-se os dois testes em conjunto, tem-se uma indicação altamente significativa da não-aleatoriedade da linha nº 20.

O teste de tendência, aplicado à linha nº 14, forneceu o resultado

$$P(z > 1,49) = 0,06812$$

praticamente confirmando o resultado obtido pelo teste de iterações.

## CAPÍTULO 9

## APLICAÇÕES DOS TESTES DE NORMALIDADE

9.1 Introdução

Foram executados dois testes de normalidade, os testes de  $\chi^2$  e de Kolmogorov-Smirnov. Esses testes foram aplicados em todas as linhas, exceto à linha nº 20, sendo essa a única em que o teste de aleatoriedade foi rejeitado.

Os testes de normalidade são de grande importância, pois, espera-se que a variável aleatória  $X_{ij}$  tenha distribuição normal em cada linha, e a aplicação desses testes confirmará ou não essa hipótese.

9.2 Teste de  $\chi^2$ 9.2.1 Generalidades

Na aplicação do teste de  $\chi^2$ , as observações foram codificadas (distribuídas em k classes), sendo o domínio  $(-\infty, +\infty)$  dividido em intervalos com iguais probabilidades  $(1/k)$  como sugerem Mann, Wald e Gumbell [41], [42], pois, dessa forma a escolha dos intervalos torna-se unívoca. A eficiência do teste de  $\chi^2$  cresce com o aumento do número de observações, dessa forma, a frequência teórica para cada intervalo foi tomada, sempre que possível, em torno de 10, e nunca inferior a 5. O número de intervalos deverá ser no mínimo igual a 4.

As estimativas da média e da variância foram obtidas através dos estimadores de máxima verossimilhança, envolvendo os dados não-codificados.

O número de graus de liberdade  $k-3$  parece ser o mais adequado, já que foram estimados dois parâmetros (média e variância). Porém, como demonstram Chernoff e Lehmann [43], a distribuição de  $\chi^2$  tem um número de graus de liberdade intermediário entre  $k-1$  e  $k-3$ .

Para testar a hipótese de normalidade das variáveis  $X_{ij}$ , linha por linha, foi considerada a distribuição de  $\chi^2$  com  $k-1$  graus de liberdade, sendo 5% o nível de significância. Assim procedendo, adotou-se um teste mais conservador no sentido de dificultar a rejeição de  $H_0$ .

#### 9.2.2 Resumo dos resultados

Os resultados do teste de  $\chi^2$  estão resumidos no quadro 9.1 .

| Nº DA<br>LINHA | k | $\bar{x}$ | s      | v | $\chi^2$<br>(calculado) | $\chi^2$<br>(crítico) |
|----------------|---|-----------|--------|---|-------------------------|-----------------------|
| 01             | 5 | -0,025    | 1,7409 | 4 | 3,23                    | 9,49                  |
| 02             | 5 | -0,012    | 1,7474 | 4 | 9,00                    | 9,49                  |
| 03             | 5 | -0,356    | 2,3067 | 4 | 0,92                    | 9,49                  |
| 04             | 7 | -0,115    | 1,5612 | 6 | 7,56                    | 12,59                 |
| 05             | 4 | 0,307     | 2,1641 | 3 | 3,60                    | 7,82                  |
| 06             | 6 | 0,065     | 1,8801 | 5 | 2,40                    | 11,07                 |
| 07             | 7 | 0,254     | 1,7401 | 6 | 6,22                    | 12,59                 |
| 08             | 4 | -0,609    | 1,9474 | 3 | 0,33                    | 7,82                  |
| 09             | 6 | 0,809     | 1,5953 | 5 | 8,13                    | 11,07                 |
| 10             | 6 | 0,172     | 1,8444 | 5 | 1,60                    | 11,07                 |
| 11             | 5 | 0,154     | 2,1139 | 4 | 5,20                    | 9,49                  |
| 12             | 4 | 0,469     | 1,9975 | 3 | 0,52                    | 7,82                  |
| 13             | 4 | -0,576    | 1,7286 | 3 | 1,17                    | 7,82                  |
| 14             | 3 | -         | -      | - | -                       | -                     |
| 15             | 6 | 0,276     | 2,0055 | 5 | 5,73                    | 11,07                 |
| 16             | 5 | -0,475    | 2,0952 | 4 | 0,57                    | 9,49                  |
| 17             | 9 | -0,127    | 1,7765 | 8 | 2,91                    | 15,51                 |
| 18             | 6 | 0,368     | 2,1146 | 5 | 7,90                    | 11,07                 |
| 19             | 9 | 1,068     | 1,8071 | 8 | 15,23                   | 15,51                 |
| 20             | - | -         | -      | - | -                       | -                     |

Quadro 9.1

### 9.3 Teste de Kolmogorov-Smirnov

#### 9.3.1 Generalidades

A rigor, o teste de Kolmogorov-Smirnov não é adequado para testar a normalidade das variáveis  $X_{ij}$ , já que o mesmo foi desenvolvido para uma distribuição contínua completamente especificada (sem parâmetros a estimar). Contudo, o teste foi aplicado e apesar da aproximação (em virtude da estimação da média e da variância), verifica-se que os resultados concordam plenamente com aqueles obtidos através do teste  $\chi^2$  com  $k-1$  graus de liberdade

O teste de Kolmogorov-Smirnov trata as observações individuais separadamente e, assim, ao contrário do teste  $\chi^2$ , não precisa perder informações em decorrência da combinação de classes. Quando as amostras são pequenas, o teste de  $\chi^2$  é menos poderoso que o de Kolmogorov-Smirnov. Além disso para amostras muito pequenas, o teste de  $\chi^2$  não é aplicável de forma alguma, o que não acontece com o teste de Kolmogorov-Smirnov.

#### 9.3.2 Resumo dos resultados

Os resultados do teste de Kolmogorov-Smirnov estão resumidos no quadro 9.2

### 9.4 Análise dos resultados

O teste de  $\chi^2$  para a normalidade mostrou que, ao nível de significância de 5%, não houve resultado significativo.

| Nº DA<br>LINHA | DESVIO<br>MÁXIMO<br>(d) | VALOR<br>CRÍTICO<br>(c) |
|----------------|-------------------------|-------------------------|
| 01             | 0,122                   | 0,259                   |
| 02             | 0,121                   | 0,192                   |
| 03             | 0,097                   | 0,259                   |
| 04             | 0,106                   | 0,227                   |
| 05             | 0,181                   | 0,294                   |
| 06             | 0,085                   | 0,242                   |
| 07             | 0,094                   | 0,158                   |
| 08             | 0,076                   | 0,269                   |
| 09             | 0,097                   | 0,240                   |
| 10             | 0,069                   | 0,176                   |
| 11             | 0,129                   | 0,264                   |
| 12             | 0,124                   | 0,287                   |
| 13             | 0,137                   | 0,275                   |
| 14             | 0,084                   | 0,327                   |
| 15             | 0,131                   | 0,237                   |
| 16             | 0,085                   | 0,250                   |
| 17             | 0,086                   | 0,201                   |
| 18             | 0,134                   | 0,244                   |
| 19             | 0,168                   | 0,198                   |
| 20             | -                       | -                       |

Quadro 9.2

No caso da linha nº 2 tem-se que

$$P(\chi^2 > 9,00) \approx 0,06$$

e para a linha nº 19

$$P(\chi^2 > 15,23) \approx 0,06$$

Portanto, considerando-se um nível de significância pouco acima de 5%, os resultados para essas duas linhas seriam significativos, o que nos leva a lançar uma certa suspeita com relação à normalidade dessas duas linhas. O teste de  $\chi^2$  não foi aplicado à linha nº 14, pois a mesma apresentou, de acordo com o critério adotado, um número de intervalos inferior a 4.

O teste de Kolmogorov-Smirnov confirmou os resultados obtidos pelo teste de  $\chi^2$ , pois, ao nível de significância de 5%, não houve resultado significativo. Nesse caso, o teste de Kolmogorov-Smirnov também é conservador, pois, foram estimados parâmetros a partir de amostras.



## CAPÍTULO 10

## APLICAÇÕES DOS TESTES DE NULIDADE DA MÉDIA

10.1 Introdução

Os testes t de Student e de Wilcoxon, foram executados com o propósito de testar se a variável aleatória  $X_{ij}$ , para cada linha de nivelamento, possui média populacional igual a zero. Se isso não ocorrer, os  $x_{ij}$  e, conseqüentemente, as discrepâncias  $\rho_{ij}$  revelarão a existência de efeitos sistemáticos.

10.2 Teste t de Student10.2.1 Generalidades

O teste t de Student foi aplicado para testar a hipótese nula de que a média dos  $x_{ij}$  é zero, contra a alternativa de que a mesma é diferente de zero. Assim, foi utilizado um teste do tipo bilateral. Como esse teste é aplicável somente para dados que seguem a distribuição normal, que é simétrica, então, testar a hipótese de que a média é zero equivale a testar a hipótese de que a distribuição é simétrica em torno de zero.

Esse teste foi aplicado à todas as linhas em que a hipótese de normalidade não tenha sido rejeitada.

O esquema para o teste é:

1.  $H_0: \mu_i = 0$
2.  $H_1: \mu_i \neq 0$
3. Nível de significância  $\alpha = 0,05$
4. Determinação da região de rejeição

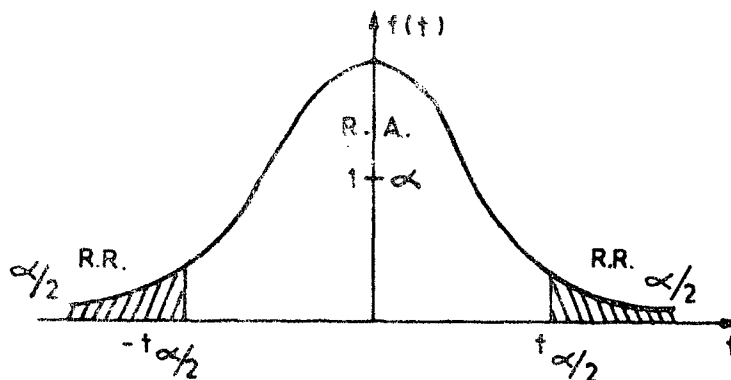


FIGURA 10.1

5. Cálculo da estatística  $t$ 

$$t = \frac{\bar{x}}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

6. Conclusão: se  $|t| > t_{\alpha/2}$ , rejeitar a hipótese  $H_0$ .

10.2.2 Resumo dos resultados

Os resultados do teste  $t$  de Student estão resumidos no quadro 10.1.

10.3 Teste de Wilcoxon10.3.1 Generalidades

O teste de Wilcoxon pode ser utilizado para testar a hipótese de que os  $x_{ij}$  são simetricamente distribuídos em torno de zero, sendo o mesmo baseado na estatística  $z_g$  (6.11) que tende assintoticamente para uma distribuição normal padronizada [44]. Na prática, essa aproximação é usada para  $n > 25$ . Como a grande maioria das linhas apresentam  $n > 25$ , ou próximo do valor limite, o teste foi aplicado em todas elas.

10.3.2 Resumo dos resultados

Os resultados do teste de Wilcoxon estão resumidos no quadro 10.2.

| Nº DA<br>LINHA | v  | $\bar{x}$ | s     | t<br>(calculado) | $t_{\alpha/2}$<br>(crítico) |
|----------------|----|-----------|-------|------------------|-----------------------------|
| 01             | 25 | -0,025    | 1,775 | -0,07            | 2,06                        |
| 02             | 49 | -0,012    | 1,765 | -0,05            | 2,02                        |
| 03             | 25 | -0,356    | 2,352 | -0,77            | 2,06                        |
| 04             | 35 | -0,115    | 1,583 | -0,44            | 2,04                        |
| 05             | 19 | 0,307     | 2,220 | 0,62             | 2,09                        |
| 06             | 29 | 0,065     | 1,912 | 0,19             | 2,05                        |
| 07             | 73 | 0,254     | 1,752 | 1,25             | 1,99                        |
| 08             | 23 | -0,609    | 1,989 | -1,50            | 2,07                        |
| 09             | 31 | 0,809     | 1,621 | 2,82             | 2,04                        |
| 10             | 59 | 0,172     | 1,860 | 0,72             | 2,01                        |
| 11             | 24 | 0,154     | 2,157 | 0,36             | 2,06                        |
| 12             | 20 | 0,469     | 2,047 | 1,05             | 2,09                        |
| 13             | 22 | -0,576    | 1,767 | -1,56            | 2,07                        |
| 14             | 15 | 0,379     | 2,550 | 0,59             | 2,13                        |
| 15             | 32 | 0,276     | 2,037 | 0,78             | 2,04                        |
| 16             | 27 | -0,475    | 2,134 | -1,18            | 2,05                        |
| 17             | 45 | -0,127    | 1,796 | -0,48            | 2,02                        |
| 18             | 30 | 0,368     | 2,150 | 0,95             | 2,04                        |
| 19             | 46 | 1,068     | 1,827 | 4,01             | 2,02                        |
| 20             | —  | —         | —     | —                | —                           |

Quadro 10.1

#### 10.4 Análise dos resultados

A aplicação do teste t de Student mostrou que a hipótese de simetria em torno da média zero deve ser rejeitada para as linhas nº 9 e 19, sendo esses resultados altamente significativos; pois, para a linha nº 9

$$P(|t| > 2,82) \approx 0,005$$

e para a linha nº 19

$$P(|t| > 4,01) \approx 0,000$$

| Nº DA LINHA | ESTATÍSTICA<br>s | $\mu_s$  | $\sigma_s$ | $z_s$  | z<br>(crítico) |
|-------------|------------------|----------|------------|--------|----------------|
| 01          | 153,0            | 162,50   | 37,17      | -0,256 | -1,644         |
| 02          | 625,0            | 637,50   | 103,59     | -0,121 | -1,644         |
| 03          | 144,0            | 175,50   | 39,37      | -0,800 | -1,644         |
| 04          | 301,0            | 333,00   | 63,65      | -0,503 | -1,644         |
| 05          | 83,0             | 105,00   | 26,79      | -0,821 | -1,644         |
| 06          | 224,0            | 232,50   | 48,62      | -0,175 | -1,644         |
| 07          | 1.107,0          | 1.350,50 | 181,90     | -1,339 | -1,644         |
| 08          | 91,0             | 138,00   | 32,88      | -1,430 | -1,644         |
| 09          | 115,0            | 248,00   | 51,03      | -2,606 | -1,644         |
| 10          | 784,0            | 885,00   | 132,49     | -0,762 | -1,644         |
| 11          | 146,0            | 162,50   | 37,17      | -0,444 | -1,644         |
| 12          | 78,0             | 105,00   | 26,79      | -1,008 | -1,644         |
| 13          | 76,0             | 115,50   | 28,77      | -1,373 | -1,644         |
| 14          | 57,0             | 68,00    | 19,34      | -0,569 | -1,644         |
| 15          | 237,0            | 280,50   | 55,97      | -0,777 | -1,644         |
| 16          | 155,0            | 203,00   | 43,91      | -1,093 | -1,644         |
| 17          | 469,0            | 517,50   | 88,59      | -0,547 | -1,644         |
| 18          | 197,0            | 248,00   | 51,03      | -0,999 | -1,644         |
| 19          | 235,0            | 564,00   | 94,50      | -3,482 | -1,644         |
| 20          | -                | -        | -          | -      | -              |

Quadro 10.2

O teste de Wilcoxon confirmou os resultados obtidos a través do teste t de Student, rejeitando também a hipótese de simetria para as duas linhas (nº 9 e 19).

No caso da linha nº 9

$$P(z_s > -2,606) \approx 0,0045$$

e para a linha nº 19

$$P(z_s > -3,482) \cong 0,0002$$

mostrando também resultados altamente significativos.

## CAPÍTULO 11

APLICAÇÕES DO TESTE  $P_\lambda$  DE PEARSON11.1 Introdução

O teste  $P_\lambda$  de Pearson, que procura estabelecer se os resultados obtidos para as linhas mostram um comportamento geral da rede ou se ao contrário correspondem a efeitos locais, foi aplicado aos testes de aleatoriedade e simetria.

11.2 Aplicações aos testes de aleatoriedade

O teste  $P_\lambda$  de Pearson foi aplicado aos testes de iterações e tendência. Os resultados obtidos para o teste de iterações estão resumidos no quadro 11.1 e para o teste de tendência no quadro 11.2.

11.3 Aplicações aos testes de nulidade da média

O teste  $P_\lambda$  de Pearson foi aplicado ao teste de Wilcoxon, sendo que a estatística  $z_s$  segue uma distribuição normal padronizada. Os resultados do teste  $P_\lambda$  aplicado ao teste de Wilcoxon estão resumidos no quadro 11.3.

11.4 Análise dos resultados

Considerando-se as linhas nº 10, 14 e 20, suspeitas quanto à aleatoriedade, nota-se que elas correspondem a praticamente 15% do tamanho da amostra (648 seções).

| Nº DA<br>LINHA | $z_r$   | $F(z_r)$ | $z_i$   |
|----------------|---------|----------|---------|
| 01             | 0,0000  | 0,5000   | 1,3863  |
| 02             | 0,5716  | 0,7162   | 0,6676  |
| 03             | 0,0000  | 0,5000   | 1,3863  |
| 04             | -1,0146 | 0,1551   | 3,7267  |
| 05             | 0,0000  | 0,5000   | 1,3863  |
| 06             | -0,3716 | 0,3551   | 2,0708  |
| 07             | -1,4046 | 0,0801   | 5,0498  |
| 08             | -0,4174 | 0,3382   | 2,1683  |
| 09             | -1,0782 | 0,1405   | 3,9255  |
| 10             | -1,5624 | 0,0591   | 5,6572  |
| 11             | 0,0000  | 0,5000   | 1,3863  |
| 12             | 0,0000  | 0,5000   | 1,3863  |
| 13             | -1,3108 | 0,0950   | 4,7085  |
| 14             | -1,5527 | 0,0603   | 5,6184  |
| 15             | 0,0000  | 0,5000   | 1,3863  |
| 16             | -0,7703 | 0,2206   | 3,0232  |
| 17             | -0,2982 | 0,3828   | 1,9207  |
| 18             | -0,7432 | 0,2287   | 2,9509  |
| 19             | 1,1929  | 0,8835   | 0,2476  |
| 20             | -3,4014 | 0,0003   | 16,0005 |

ESTATÍSTICA  $P_\lambda = 66,05$

Quadro 11.1

A verificação quantitativa da influência dessas três linhas no comportamento geral da rede, pode ser feita através do teste  $P_\lambda$  de Pearson, que forneceu os resultados:

a) Para o teste de iterações

$$P_{\lambda, z_r} = 66,05$$

$$\chi^2_{40;0,05} = 55,76$$

$$\chi^2_{40;0,01} = 63,69$$

b) Para o teste de tendência

$$P_{\lambda, z_\eta} = 49,18$$

$$\chi^2_{40;0,05} = 55,76$$

$$\chi^2_{40;0,01} = 63,69$$

Verifica-se que o teste  $P_\lambda$  de Pearson é significativo para o teste de iterações, tanto ao nível de significância de 5% quanto 1%, o que não ocorre com o teste de tendência. Pode-se considerar o resultado para o teste de iterações como altamente significativo.

A aplicação do teste  $P_\lambda$  de Pearson ao teste de Wilcoxon forneceu o resultado

$$P_{\lambda, z_s} = 80,59$$

$$\chi^2_{38;0,05} = 53,09$$

$$\chi^2_{38;0,01} = 60,58$$



| Nº DA<br>LINHA | $z_{\eta}$ | $F(z)$ | $z_i$  |
|----------------|------------|--------|--------|
| 01             | 1,0793     | 0,8598 | 3,9291 |
| 02             | 0,7225     | 0,7650 | 2,8965 |
| 03             | -0,4544    | 0,3248 | 0,7854 |
| 04             | -0,2463    | 0,4027 | 1,0307 |
| 05             | -0,0641    | 0,4745 | 1,2866 |
| 06             | 0,4839     | 0,6858 | 2,3152 |
| 07             | 0,4823     | 0,6852 | 2,3117 |
| 08             | 0,8453     | 0,8010 | 3,2291 |
| 09             | 1,3184     | 0,9063 | 4,7357 |
| 10             | 0,9201     | 0,8212 | 3,4433 |
| 11             | -0,5938    | 0,2763 | 0,6468 |
| 12             | -1,1483    | 0,1254 | 0,2680 |
| 13             | -0,5771    | 0,2819 | 0,6624 |
| 14             | 1,4944     | 0,9325 | 5,3903 |
| 15             | -0,3224    | 0,3736 | 0,9355 |
| 16             | 0,0677     | 0,5270 | 1,4973 |
| 17             | 1,1470     | 0,8743 | 4,1478 |
| 18             | -0,3173    | 0,3755 | 0,9416 |
| 19             | -1,6806    | 0,0464 | 0,0951 |
| 20             | 2,2150     | 0,9866 | 8,6280 |

ESTATÍSTICA  $P_{\lambda} = 49,18$

Quadro 11.2

| Nº DA<br>LINHA | $z_s$  | $F(z_s)$ | $z_i$   |
|----------------|--------|----------|---------|
| 01             | -0,256 | 0,3990   | 1,8377  |
| 02             | -0,121 | 0,4518   | 1,5888  |
| 03             | -0,800 | 0,2119   | 3,1037  |
| 04             | -0,503 | 0,3075   | 2,3587  |
| 05             | -0,821 | 0,2058   | 3,1615  |
| 06             | -0,175 | 0,4305   | 1,6854  |
| 07             | -1,339 | 0,0903   | 4,8096  |
| 08             | -1,430 | 0,0764   | 5,1446  |
| 09             | -2,606 | 0,0046   | 10,7719 |
| 10             | -0,762 | 0,2230   | 3,0009  |
| 11             | -0,444 | 0,3285   | 2,2263  |
| 12             | -1,008 | 0,1567   | 3,7065  |
| 13             | -1,373 | 0,0849   | 4,9331  |
| 14             | -0,569 | 0,2847   | 2,5128  |
| 15             | -0,777 | 0,2186   | 3,0412  |
| 16             | -1,093 | 0,1372   | 3,9727  |
| 17             | -0,547 | 0,2922   | 2,4607  |
| 18             | -0,999 | 0,1589   | 3,6790  |
| 19             | -3,482 | 0,0002   | 16,5962 |
| 20             | -      | -        | -       |

Estatística  $P_\lambda = 80,59$

Quadro 11.3

Portanto, o resultado é significativo ao nível de significância de 1%. Assim, deve-se rejeitar a hipótese de nulidade da média populacional.

## CAPÍTULO 12

## APLICAÇÃO DO TESTE DE KRUSKALL-WALLIS

12.1 Introdução

O teste cumulativo de Kruskall-Wallis foi executado com o objetivo de testar a hipótese nula de que as distribuições das variáveis aleatórias  $X_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, 20$ ), linha por linha, são idênticas e com mesma média. O teste é do tipo unilateral direito.

12.2 Resumo dos resultados

Os resultados do teste de Kruskall-Wallis estão resumidos no quadro 12.1.

12.3 Análise dos resultados

O teste de Kruskall-Wallis forneceu

$$H = 29,81 > \chi^2_{18;0,05} = 28,87$$

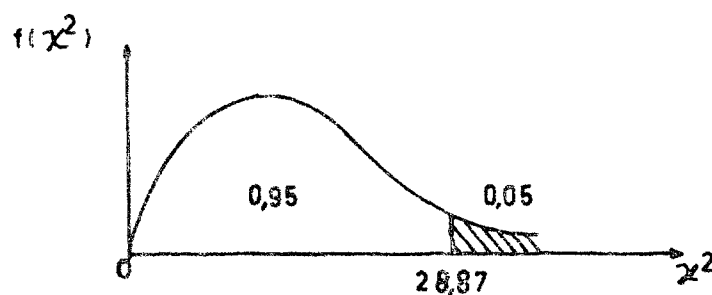


FIGURA 12.1

o que leva à rejeição da hipótese de que a distribuição é a mesma (completamente especificada) para todas as linhas, ao nível de significância de 5%. Entretanto, ao nível de significância de 1% não se pode excluir a possibilidade de uma mesma distribuição para as 19 linhas que formam a amostra, pois

$$H = 29,81 < \chi^2_{18;0,01} = 34,81$$

| Nº DA LINHA | NÚMERO DE SEÇÕES | SOMA DOS POSTOS |
|-------------|------------------|-----------------|
| 01          | 26               | 7948,5          |
| 02          | 50               | 15636,5         |
| 03          | 26               | 7272,5          |
| 04          | 36               | 10649,0         |
| 05          | 20               | 6752,5          |
| 06          | 30               | 9483,0          |
| 07          | 74               | 24858,0         |
| 08          | 24               | 6090,0          |
| 09          | 32               | 12416,5         |
| 10          | 60               | 19712,5         |
| 11          | 25               | 8162,0          |
| 12          | 21               | 7336,0          |
| 13          | 23               | 5909,5          |
| 14          | 16               | 5345,5          |
| 15          | 33               | 11136,0         |
| 16          | 28               | 7607,5          |
| 17          | 46               | 13623,5         |
| 18          | 31               | 10576,0         |
| 19          | 47               | 19761,0         |
| 20          | -                | -               |

ESTATÍSTICA H = 29,81

Quadro 12.1

## CAPÍTULO 13

## APLICAÇÃO DO TESTE DE BARTLETT

13.1 Introdução

O teste de Bartlett foi executado com o objetivo de testar a hipótese de que os  $x_{ij}$  tem a mesma variância em cada linha e, portanto, de que as medições, linha por linha, são homogêneas. O teste aplicado é do tipo unilateral direito.

13.2 Resumo dos resultados

Os resultados do teste de Bartlett estão resumidos no quadro 13.1.

13.3 Análise dos resultados

O teste de Bartlett forneceu

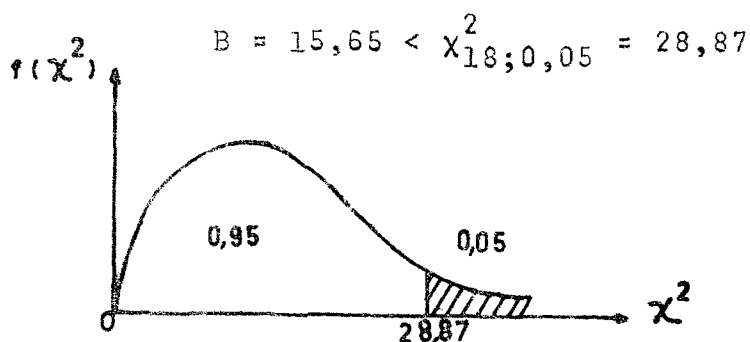


FIGURA 13.1

resultado que não é significativo ao nível de significância de 5%, de modo que não se pode rejeitar a hipótese de homogeneidade das medições para as 19 linhas componentes da amostra.

| Nº DA<br>LINHA | NÚMERO DE<br>SEÇÕES | v  | VARIÂNCIA<br>$s^2$ |
|----------------|---------------------|----|--------------------|
| 01             | 26                  | 25 | 3,152              |
| 02             | 50                  | 49 | 3,116              |
| 03             | 26                  | 25 | 5,534              |
| 04             | 36                  | 35 | 2,507              |
| 05             | 20                  | 19 | 4,930              |
| 06             | 30                  | 29 | 3,657              |
| 07             | 74                  | 73 | 3,069              |
| 08             | 24                  | 23 | 3,957              |
| 09             | 32                  | 31 | 2,627              |
| 10             | 60                  | 59 | 3,459              |
| 11             | 25                  | 24 | 4,655              |
| 12             | 21                  | 20 | 4,190              |
| 13             | 23                  | 22 | 3,124              |
| 14             | 16                  | 15 | 6,502              |
| 15             | 33                  | 32 | 4,148              |
| 16             | 28                  | 27 | 4,553              |
| 17             | 46                  | 45 | 3,226              |
| 18             | 31                  | 30 | 4,621              |
| 19             | 47                  | 46 | 3,337              |
| 20             | -                   | -  | -                  |

ESTATÍSTICA B = 15,65

Quadro 13.1

## CONCLUSÕES

Os testes de aleatoriedade mostraram resultados altamente significativos para a linha nº 20, ou seja, um comportamento não-aleatório para a mesma. Suspeita-se também quanto à aleatoriedade das linhas nº 10 e 14, em vista dos resultados apresentados; essas três linhas em conjunto correspondem a praticamente 15% do tamanho da amostra. Pode-se concluir, com base nesses resultados e pela escolha do nível de significância de 5%, existir uma indicação de não-aleatoriedade dos  $x_{ij}$ , ou seja, um efeito da correlação entre os  $x_{ij}$  e a ordem em que as medidas foram realizadas <sup>[45]</sup>, considerando-se a totalidade das linhas.

O teste cumulativo  $P_\lambda$  de Pearson verificou essa conclusão quantitativamente, mostrando resultado altamente significativo. Um exame mais detalhado mostrou contudo que a linha nº 20 isoladamente tem uma contribuição muito grande para o valor de  $P_\lambda$  no teste cumulativo, de maneira que se a mesma for excluída da amostra, o teste cumulativo para a aleatoriedade não será significativo.

As aplicações dos testes de normalidade não mostraram resultados significativos, ao nível de significância de 5%, não se podendo rejeitar a hipótese de normalidade dos  $x_{ij}$ .

Os testes de Wilcoxon e t mostraram que a hipótese de nulidade da média dos  $x_{ij}$  deve ser rejeitada para as linhas nº 9 e 19. O teste cumulativo  $P_\lambda$  aplicado a esses dois testes mostraram resultados altamente significativos. Conseqüentemente, deve-se considerar a existência de médias diferentes de zero

para as diversas linhas. A existência de assimetria dos  $x_{ij}$  em relação a zero, confirma o resultado clássico dado primeiramente por Lallemant sobre a existência de um efeito sistemático [46].

O teste de Kruskal-Wallis, ao nível de significância de 5%, mostrou resultado significativo; dessa forma deve-se rejeitar a hipótese de equidistribuições de mesma média para os  $x_{ij}$  nas diferentes linhas. Entretanto, esse resultado não é altamente significativo, pois, a hipótese não deve ser rejeitada ao nível de 1%.

O teste de Bartlett, ao nível de significância de 5%, não mostrou resultados significativos; dessa forma não se pode rejeitar a hipótese de homogeneidade das medições.

Portanto, excluindo a linha nº 20 dos testes de normalidade, simetria, Kruskal-Wallis,  $P_\lambda$  de Pearson e Bartlett, já que foi rejeitada a hipótese de aleatoriedade da mesma, a totalidade dos testes forneceram as seguintes características para a rede considerada:

- a) uma indicação de não-aleatoriedade dos  $x_{ij}$ ;
- b) uma indicação de normalidade dos  $x_{ij}$ ;
- c) evidência de que as distribuições dos  $x_{ij}$  não apresentam médias iguais a zero, e, são diferentes umas das outras. Esse último resultado confirma o fato de que as discrepâncias  $p_{ij}$  são afetadas por um erro sistemático;
- d) uma indicação de que as medições realizadas são homogêneas.

Em virtude da amostra considerada, que abrange partes dos estados do Maranhão e Piauí, não representar as diferentes características geográficas brasileiras, sugere-se:



- a) fazer uma análise estatística, nos moldes deste trabalho , para a totalidade da rede brasileira de nivelamento de 1ª ordem;
- b) realizar a análise estatística das discrepâncias acumuladas;
- c) construir os diagramas das discrepâncias acumuladas, onde, no eixo das abcissas tem-se

$$z_{ir} = \sum_{i=1}^r R_{ij} ,$$

isto é, as distâncias acumuladas e, no eixo das ordenadas as discrepâncias acumuladas. Esses diagramas complementam a análise das discrepâncias acumuladas quando construimos as linhas dadas por:

$$1^{\circ}) \hat{M}_{ir}$$

$$2^{\circ}) \hat{M}'_{ir} = \hat{M}_{ir} \pm \hat{\sigma}_{ir}$$

$$3^{\circ}) \hat{M}''_{ir} = \hat{M}_{ir} \pm 1,96\hat{\sigma}_{ir}$$

onde:

$$\hat{M}_{ir} = \hat{E} [P_{ir}] = x_{ij} \sum_{i=1}^r R_{ij}, \text{ para a } j\text{-ésima linha}$$

$$\hat{\sigma}_{ir} = \hat{V} [P_{ir}] = s_i^2 \sum_{i=1}^r R_{ij}, \text{ para a } j\text{-ésima linha}$$

$$P_{ir} = \sum_{i=1}^r \rho_{ij} \quad (\text{discrepâncias acumuladas}).$$

```

C      CURSO DE POS-GRADUACAO EM CIENCIAS GEODESICAS
C      JAIR MENDES MARQUES
C      TESTE DE ITERACAO - PROGRAMA PRINCIPAL
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION RC(74),R(74),X(74),Y(74),IK(74)
C      ENTRADA DO NUMERO DE SECCOES "N"
      READ(2,5)N
5      FORMAT(G)
C      ENTRADA DAS DISCREPANCIAS PARCIAIS "RO"
      READ(2,10)(RO(I),I=1,N)
C      ENTRADA DOS COMPRIMENTOS DAS SECCOES "R"
      READ(2,10)(R(I),I=1,N)
10     FORMAT(19G)
      WRITE(3,34)
34     FORMAT(/10X,'DISCREPANCIAS RO')
      WRITE(3,33)(RO(I),I=1,N)
33     FORMAT(/5X,19F6.1)
      WRITE(3,45)
45     FORMAT(/10X,'COMPRIMENTO DAS SECCOES = R')
      WRITE(3,44)(R(I),I=1,N)
44     FORMAT(/5X,19F6.2)
      CALL VAX(RO,R,X,N)
      WRITE(3,4)
4      FORMAT(/10X,'VARIAVEL ALEATORIA X')
      WRITE(3,1)(Y(I),I=1,N)
1      FORMAT(/19F8.3)
      CALL ORD(Y,N,NN,NJ,K,J,XL)
      WRITE(3,6)
6      FORMAT(/5X,'VARIAVEL ALEATORIA X - ORDENADA')
      WRITE(3,1)(Y(I),I=1,N)
      CALL MED(Y,N,N1,X1,I1,I2,I3,XM)
      CALL VAX(RO,R,X,N)
      CALL NIT(N,N1,N2,X1,I1,I2,J,K,NY,NT,XM,X,IK,NR)
      CALL ESTZ(NR,N2,SR,ER,VR,2)
      WRITE(3,15)XM,NH
15     FORMAT(/5X,'MEDIANA =',F10.5,5X,
1'NUMERO DE ITERACOES =',I2)
      WRITE(3,17)EN,VR,Z
17     FORMAT(/5X,'E(R) =',F10.5,5X,'V(R) =',F10.5,5X,
1'Z =',F10.5)
C      TESTE AO NIVEL DE SIGNIFICANCIA DE 5 POR CENTO
      ZC=-1.644
      IF(ZC-Z)90,95,95
95     WRITE(3,97)
97     FORMAT(/5X,'CONCLUSAO: REJEITA-SE A HIPOTHESE DE
1 ALEATORIEDADE')
      GO TO 77
90     WRITE(3,99)
99     FORMAT(/5X,'CONCLUSAO: ACEITA-SE A HIPOTHESE DE
1 ALEATORIEDADE' )
77     STOP
      END

C
C      CALCULO DA VARIAVEL ALEATORIA X(I)
      SUBROUTINE VAX(RC,R,X,I)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION RC(1),R(1),X(1)
      DO 5 J=1,I

```

```

5      X(J)=RO(J)/SORT(R(J))
      RETURN
      END

C
C      ORDENACAO DA VARIABEL ALEATORIA X(I)

      SUBROUTINE ORD(Y,N,NN,NJ,K,J,XL)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
      DIMENSION Y(N)
      NN=N
5      NJ=NN-1
      DO 10 J=1,NJ
      K=J+1
      IF(Y(J)-Y(K))10,10,15
15     XL=Y(K)
      Y(K)=Y(J)
      Y(J)=XL
10     CONTINUE
      NN=NN-1
      IF(NN=1)20,20,5
20     RETURN
      END

C
C      CALCULO DA MEDIANA XM
      SUBROUTINE MED(Y,N,N1,X1,I1,I2,I3,XM)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
      DIMENSION Y(N)
      N1=N/2
      X1=N/2.0
      IF(N1=X1)5,10,5
5      I1=(N+1)/2
      XM=Y(I1)
      GO TO 15
10     I2=N1
      I3=N1+1
      XM=(Y(I2)+Y(I3))/2.0
15     RETURN
      END

C
C      CALCULO DO NUMERO DE ITERACOE NR
      SUBROUTINE NIT(N,N1,N2,X1,I1,I2,J,K,NY,NT,XP,
1X,IK,NR)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
      DIMENSION IK(N),X(N)
      IF(N1=X1)5,10,5
5      N2=I1-1
      GO TO 15
10     N2=I2
15     K=0
      DO 40 I=1,N
      J=I
      K=K+1
      IF(X(J)-XM)25,30,35
25     IK(K)=0
      GO TO 40
35     IK(K)=1
      GO TO 40
30     K=K-1

```

```

40      CONTINUE
      NY=K-1
      NT=0
      DO 55 J=1,NY
      IF(IK(J)-IK(J+1))50,55,50
50      NT=NT+1
55      CONTINUE
      NR=NT+1
      RETURN
      END

C

C      CALCULO DA ESTATISTICA Z
      SUBROUTINE ESTZ(NR,N2,SR,ER,VR,Z)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      ER=1.0+NR
      VR=N2*(N2-1.0)/(2.0*N2-1.0)
      SR=SQRT(VR)
      Z=(NR-ER)/SR
      RETURN
      END

```

```

C      CURSO DE POS-GRADUACAO EM CIENCIAS GEODESICAS
C      JAIR MENDES MARGUES
C      TESTE DE TENDENCIA - PROGRAMA PRINCIPAL
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION X(74),RO(74),R(74)
C      ENTRADA DO NUMERO DE SECCES "N"
      READ(2,1)N
1      FORMAT(G)
C      ENTRADA DAS DISCREPANCIAS PARCIAIS "RO"
      READ(2,5)(RO(I),I=1,N)
C      ENTRADA DOS COMPRIMENTO DAS SECCES "R"
      READ(2,5)(R(I),I=1,N)
5      FORMAT(74G)
      WRITE(3,34)
34     FORMAT(/10X,'DISCREPANCIAS RO')
      WRITE(3,33)(RO(I),I=1,N)
33     FORMAT(/5X,19F6.1)
      WRITE(3,45)
45     FORMAT(/10X,'COMPRIMENTO DAS SECCES = R')
      WRITE(3,44)(R(I),I=1,N)
44     FORMAT(/5X,19F6.2)
C      CALCULO DE Z
      CALL TEND(RO,H,X,Z,D2,XM,S2,ETA,N)
      WRITE(3,4)
4      FORMAT(/10X,'VARIABEL ALEATORIA X')
      WRITE(3,7)(X(I),I=1,N)
7      FORMAT(/19F8.3)
      WRITE(3,13)D2,XM,S2,ETA,Z
13     FORMAT(/5X,'ESTATISTICA D2 =',F10.5,5X,'MEDIA = ',
1F10.5,5X,'VARIANCIA =',F10.5,5X,19F6.1,5X,'RAZAO ETA =',F10
1.5,5X,'Z =',F10.5)
C      TESTE AO NIVEL DE SIGNIFICANCIA DE 5 POR CENTO
      ZC=1.644
      IF(Z-ZC)15,20,20
15     WRITE(3,25)
25     FORMAT(/5X,'CONCLUSAO: ACEITA-SE A HIPOTESE DE
1 ALEATORIEDADE')
      GO TO 35
20     WRITE(3,30)
30     FORMAT(/5X,'CONCLUSAO: REJEITA-SE A HIPOTESE DE
1 ALEATORIEDADE')
35     STOP
      END

C
C      SUBROTINA PARA O TESTE DE TENDENCIA - TREND TEST
      SUBROUTINE TEND(RO,R,X,Z,D2,XM,S2,ETA,N)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION X(N),RO(N),R(N)
C      CALCULO DA VARIABEL ALEATORIA X(I)
      DO 5 I=1,N
5      X(I)=RO(I)/SQRT(R(I))
C      CALCULO DE D2
      SQ=0.0
      M=N-1
      DO 10 I=1,M
10     SQ=SQ+(X(I+1)-X(I))**2
      D2=SQ/M
C      CALCULO DE S2

```

```
      ST=0.0
      DO 15 I=1,N
15     S1=ST+X(I)
      XM=ST/N
      SM=0.0

      DO 20 I=1,N
20     SM=SM+(X(I)-XM)**2
      S2=SM/N
      C    CALCULO DE ETA
      ETA=D2/S2
      C    CALCULO DE Z
      A=1.0-(ETA/2.0)
      B=(N-2.0)/((N**2)-1.0)
      Z=A/SQRT(B)
      RETURN
      END
```

```

C      CURSO DE POS-GRADUACAO EM CIENCIAS GEODESICAS
C      JAIR MENDES MARGUES
C      TESTE DE QUI-QUADRADO - PROGRAMA PRINCIPAL
      IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
      DIMENSION RC(74),R(74),Y(74),ZC(10),XC(10)
      DIMENSION F(10),FO(10),XG(10),A(42)
C      ENTRADA DO NUMERO DE SECCES "N"
      READ(2,1)N
1      FORMAT(G)
C      ENTRADA DAS DISCREPANCIAS "RC" E DOS
C      COMPRIMENTOS DAS SECCOES "R"
      READ(2,5)(RC(I),I=1,N)
      READ(2,5)(R(I),I=1,N)
5      FORMAT(23G)
      CALL VAX(R0,R,Y,N,N1)
      M=N1-1
      CALL EXZC(N1,M,ZC,A)
      CALL EXXC(Y,N,M,ZC,XC,XM,SD)
      CALL FOB(N1,N,M,Y,XC,F,FO)
      CALL FTE(N,N1,F1)
      NF=N1-2
      WRITE(3,40)
40      FORMAT(76(' '))
      WRITE(3,45)
45      FORMAT(/,8X,'X(1)',19X,'Z(1)',10X,
1'FREQ.OBS.FO(1)',2X,'FREQ.TEOR.F1(1)')
      WRITE(3,40)
      WRITE(3,55)XC(1),ZC(1),FO(1),F1
55      FORMAT(1X,'-00',4X,'...',1X,F6.3,7X,'-
100',4X,'...',F6.3,7X,F5.2,14X,F5.2)
      DO 65 I=1,NF
65      WRITE(3,70)XC(I),XC(I+1),ZC(1),ZC(I+1),FO(I+1),
1F1
70      FORMAT(1X,F6.3,1X,'...',1X,F6.3,7X,F6
1.3,1X,'...',F6.3,7X,F5.2,14X,F5.2)
      WRITE(3,75)XC(M),ZC(M),FO(N1),F1
75      FORMAT(1X,F6.3,1X,'...',1X,'+00',10X,F
16.3,1X,'...','+00',10X,F5.2,14X,F5.2)
      WRITE(3,40)
      WRITE(3,80)N,N1
80      FORMAT(/10X,'FREQUENCIA TOTAL N =',13,10X,'N
1UMERO DE INTERVALOS NI =',13)
      WRITE(3,85)XM,SD
85      FORMAT(/10X,'MEDIA XM =',F7.3,16X,'DESVIO PA
1URAO SD =',F8.4)
C      TESTE AO NIVEL DE SIGNIFICANCIA DE 5%
      CALL QUI(N1,FO,F1,X2)
      XG(3)=7.82
      XG(4)=9.49
      XG(5)=11.67
      XG(6)=12.59
      XG(7)=14.67
      XG(8)=15.51
      XG(9)=16.92
      LG=N1-1
      CC=XG(LG)
      WRITE(3,90)X2,CC,LG
90      FORMAT(/10X,'QUI-QUADRADO CALCULADO X2 =',F6

```

```

1.2,/,10X,'QUI-QUADRADO TEORICO CC =',F6.2,
13X,'(G.L. =',I2,')')
IF(X2-CC)35,35,30
30 WRITE(3,22)
22 FORMAT(/10X,'CONCLUSAO: REJEITAR A
    1 HIPOTESE DE NORMALIDADE')
GO TO 95
35 WRITE(3,99)
99 FORMAT(/10X,'CONCLUSAO: NAO REJEITAR
    1 A HIPOTESE DE NORMALIDADE')
95 STOP
END

C
C CALCULO DA VARIÁVEL ALEATORIA X(I)
C E DO NUMERO DE INTERVALOS
SUBROUTINE VAX(MO,M,X,I,NI)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION RC(1),R(1),X(1)
DO 5 J=1,I
5 X(J)=RC(J)/SQRT(R(J))
IF(I-50)15,10,10
15 NI=1/5
GO TO 20
10 NI=1/10
20 CONTINUE
RETURN
END

C
C CALCULO DAS FREQUENCIAS TEORICAS FT
SUBROUTINE FTE(N,NI,FT)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
P=1.0/NI
F1=P*N
RETURN
END

C
C CALCULO DOS EXTREMOS ZC(I) DOS INTERVALOS
SUBROUTINE EXZC(NI,M,ZC,A)
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION ZC(M),A(42)
A(4)=0.674
A(5)=0.0
A(6)=0.674
A(7)=0.841
A(8)=0.253
A(9)=0.253
A(10)=0.841
A(11)=0.970
A(12)=0.431
A(13)=0.0
A(14)=0.431
A(15)=0.970
A(16)=1.067
A(17)=0.565
A(18)=0.181
A(19)=0.101
A(20)=0.565

```



```

A(21)=1.067
A(22)=-1.150
A(23)=-0.674
A(24)=-0.318
A(25)=0.0
A(26)=0.318
A(27)=0.674
A(28)=1.150
A(29)=-1.221
A(30)=-0.765
A(31)=-0.431

A(32)=-0.140
A(33)=0.140
A(34)=0.431
A(35)=0.765
A(36)=1.221
A(37)=-1.281
A(38)=-0.841
A(39)=-0.524
A(40)=-0.253
A(41)=0.0
A(42)=0.253
A(43)=0.524
A(44)=0.841
A(45)=1.281
K1=0
K=4
DO 15 I=4,N1
  I2=I
  IF (NI-I2)5,10,5
10  N1=K
  GO TO 15
5    K=K+K1+3
  K1=K1+1
15   CONTINUE
  N2=N1+NI-2
  NN=0
  DO 20 I=N1,N2
    NN=NN+1
20   ZC(NN)=A(I)
  RETURN
  END

C
C    CALCULO DOS EXTREMOS XC(I) LOS
C    INTERVALOS
C    SUBROUTINE EXXC(Y,N,M,ZC,XC,XM,SD)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
      DIMENSION Y(N),XC(M),ZC(M)
      SI=0.0
      DO 5 I=1,N
5        SI=SI+Y(I)
      XM=SI/N
      SM=0.0
      DO 10 I=1,N
10       SM=SM+(Y(I)-XM)**2
      SD=SQRT(SM/N)
      DO 15 I=1,M
15       XC(I)=XM+ZC(I)*SD

```

```

      RETURN
      END

C
C      CALCULO DAS FREQUENCIAS OBSERVADAS FO
      SUBROUTINE FOB(NI,N,M,Y,XC,F,FO)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
      DIMENSION Y(N),XC(M),F(NI),FO(NI)
      N=NI-1
      DO 5 J=1,M
      A=0.0
      DO 10 I=1,N
      IF(Y(I)-XC(J))15,15,10
15      A=A+1.0
10      CONTINUE
5      F(J)=A
      F(NI)=FLOAT(N)

      DO 20 I=1,M
20      FO(I+1)=F(I+1)-F(I)
      FO(1)=F(1)
      RETURN
      END

C
C      CALCULO DO GUI-GUADRADO
      SUBROUTINE GUI(NI,FO,FT,X2)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
      DIMENSION FO(NI)
      X2=0.0
      DO 5 I=1,NI
5      X2=((FO(I)-FT)**2)/FT+X2
      RETURN
      END

```

```

C      CURSO DE POS-GRADUACAO EM CIENCIAS GEODESICAS
C      JAIR MENDES MARGUES
C      TESTE DE KOLMOGOROV-SMIRNOV
C      PROGRAMA PRINCIPAL
      IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
      DIMENSION RC(74),R(74),NF(74),Y(74)
      DIMENSION F1(74),F2(74),A1(74),A2(74),A(148)
      DIMENSION C(15),Y1(74),Z(74),I(74)
C      ENTRADA DO NUMERO DE SECCES "N"
      READ(2,1)N
1      FORMAT(G)
C      ENTRADA DAS DISCREPANCIAS "RC" E
C      DOS COMPRIMENTOS DAS SECCES "R"
      READ(2,5)(RC(I),I=1,N)
      READ(2,5)(R(I),I=1,N)
5      FORMAT(16G)
      CALL VAX(RC,R,Y,N,XM,SD)
      CALL ORD(Y,N)
      CALL CONTA(Y,N,I)
      CALL FREQ(Y,NF,I,N,Y1)
      CALL FDO(NF,I,F1,N)
      CALL VAPZ(XM,SD,I,M1,Y1,Z)
      CALL NCRMAL(Z,F2,I,I)
      CALL A1A2(F1,F2,A1,A2,A,I,M1)
      CALL ORD(A,M1,NM,NJ,F,J,XL)
      CALL DNAX(A,M1,LM)
      WRITE(3,10)
10     FORMAT(10X,47(' '))
      WRITE(3,20)
20     FORMAT(12X,'X(I)',3X,'F(I)',3X,'F1(I)',4X,'F2(I)',
1)     1)',3X,'A1',6X,'A2')
      WRITE(3,10)
      DO 30 I=1,I
30     WRITE(3,35)Y1(I),NF(I),F1(I),F2(I),A1(I),A2(I)
35     FORMAT(11X,F6.3,3X,I2,4X,F5.3,4X,F5.3,3X,F5.3,
1)     13X,F5.3)
      WRITE(3,10)
      WRITE(3,60)N
66     FORMAT(/10X,'NUMERO DE SECCES N =' ,I3)
      CALL TEST(C,DC,N)
      WRITE(3,40)DM,DC
40     FORMAT(/10X,'DESVIO MAXIMO DM =' ,F6.3,3X,'VALOR
1)     1 CRITICO DC =' ,F6.3)
      IF(DM-DC)45,50,52
45     WRITE(3,55)
55     FORMAT(/10X,'CONCLUSAO: NAO REJEITAR A HIPOTHESE DE
1)     1 NORMALIDADE')
      GO TO 65
50     WRITE(3,60)
60     FORMAT(/10X,'CONCLUSAO: REJEITA-SE A HIPOTHESE
1)     1 DE NORMALIDADE')
65     STOP
      END

C
C      CALCULO DA VARIÁVEL ALFABETICA X(I), DA MEDIA
C      XM E DO DESVIO PADRAO SD
C      SUBROUTINE VAX(RC,R,X,I,XM,SD)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)

```

```

        DIMENSION RC(1),R(1),X(1)
        DO 5 J=1,I
5       X(J)=RO(J)/SQRT(R(J))
C       CALCULO DA MEDIA
        S1=0.0

        DO 8 J=1,I
8       S1=S1+X(J)
        XM=S1/I
C       CALCULO DO DESVIO PADRAO
        SM=0.0
        DO 10 J=1,I
10      SM=SM+(X(J)-XM)**2
        S2=SM/(I-1)
        SD=SQRT(S2)
        RETURN
        END

C
C       ORDENACAO DOS X(I)
        SUBROUTINE ORD(Y,N)
        IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
        DIMENSION Y(N)
        NN=N
5       NJ=NN-1
        DO 10 J=1,NJ
            K=J+1
            IF(Y(J)-Y(K))10,10,15
15      XL=Y(K)
            Y(K)=Y(J)
            Y(J)=XL
10      CONTINUE
            NN=NN-1
            IF(NN-1)20,20,5
20      RETURN
        END

C
C       DETERMINACAO DO NUMERO DE INTERVALOS
        SUBROUTINE CONTA(Y,N,J)
        IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
        DIMENSION Y(N)
        J=0
        N2=N-1
        DO 5 I=1,N2
            IF(Y(I)-Y(I+1))20,5,20
20      J=J+1
5       CONTINUE
            J=J+1
            RETURN
        END

C
C       DETERMINACAO DAS FREQUENCIAS DOS X(I)
        SUBROUTINE FREQ(Y,NF,L,N,Y1)
        IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
        DIMENSION Y(N),NF(L),Y1(L)
        K1=0
        L=0
        N1=N-1
        DO 5 I=1,N1

```

```

      K=0
      M=K1+1
      IF (M=N) 7,30,30
7      DO 10 J=1,N
      IF (Y(M)-Y(J))10,12,10
12     K1=K1+1
      K=K+1
10     CONTINUE
      L=L+1
      NF(L)=K
      Y1(L)=Y(K1)

5      CONTINUE
30     IF (Y(M)-Y(N1))35,40,35
35     L=L+1
      K1=K1+1
      NF(L)=1
      Y1(L)=Y(K1)
40     CONTINUE
      RETURN
      END

C
C      FUNCAO DISTRIBUICAO PARA OS VALORES OBSERVADOS
      SUBROUTINE FDC(NF,L,F1,N)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION NF(L),F1(L)
      R=FLOAT(N)
      F1(1)=NF(1)/R
      DO 5 I=2,L
5      F1(I)=NF(I)/R+F1(I-1)
      RETURN
      END

C
C      TRANSFORMACAO DOS X(I) EM VARIÁVEL PADRONIZADA
      SUBROUTINE VAPZ(XM,SD,L,N1,Y1,Z)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION Z(L),Y1(L)
C      CALCULO DE Z(I)
      DO 30 I=1,L
30     Z(I)=(Y1(I)-XM)/SD
      N1=2*L
      RETURN
      END

C
C      CALCULO DA FUNCAO DISTRIBUICAO TEORICA
      SUBROUTINE NORMAL(X,Z,T,L)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION X(L),Z(L),I(L)
      G=SQRT(1/(2*3.141593))
      F=0.23164190
      B1=0.31938153
      B2=-0.356563782
      B3=1.781477937
      B4=-1.821255978
      B5=1.330274429
      DO 5 I=1,L
      A=0.0
      IF (X(I))10,15,15

```

```

10      X(I)=ABS(X(I))
      A=1.0+A
15      T(I)=1/(1+P*(X(I)))
      Z(I)=Q*EXP((-X(I)**2)/2)
      Z(I)=Z(I)*T(I)*(B1+T(I)*(B2+T(I)*(B3+T(I)
      1*(B4+T(I)*E5))))
      IF(A-1.0)20,25,20
25      Z(I)=1.0-Z(I)
20      Z(I)=1.0-Z(I)+0.1E-6
5      CONTINUE
      RETURN
      END

C
C      CALCULO DE A1,A2 E A
      SUBROUTINE A1A2(F1,F2,A1,A2,A,L,M1)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION F1(L),F2(L),A1(L),A2(L),A(M1)
      A1(1)=F2(1)
      I1=L-1
      DO 5 I=1,L1
      I1=I+1
      A1(I1)=ABS(F2(I+1)-F1(I))
5      A2(I)=ABS(F2(1)-F1(1))
      A2(L)=ABS(F2(L)-F1(L))
      DO 13 I=1,L
      A(I)=A1(I)
      M3=L+I
13      A(M3)=A2(I)
      RETURN
      END

C
C      CALCULO DO DESVIO MAXIMO - CM
      SUBROUTINE CMAX(A,M1,DM)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION A(M1)
      DM=A(M1)
      RETURN
      END

C
C      TESTE DE HIPOTESE AO NIVEL DE SIGNIFICANCIA
C      DE 5 POR CENTO
      SUBROUTINE TEST(C,DC,N)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION C(15)
      C(16)=0.327
      C(17)=0.318
      C(18)=0.309
      C(19)=0.301
      C(20)=0.294
      C(21)=0.287
      C(22)=0.281
      C(23)=0.275
      C(24)=0.269
      C(25)=0.264
      C(26)=0.259
      C(27)=0.254
      C(28)=0.250

```

```
      C(29)=0.246  
      C(30)=0.242  
      IF(N-30)5,5,10  
5      DC=C(N)  
      GO 10 45  
10     R=FLOAT(N)  
      DC=1.36/SQR1(R)  
45     RETURN  
      END
```

```

C      CURSO DE POS-GRADUACAO EM CIENCIAS GEODESICAS
C      JAIR MENDES MARGUES
C      TESTE DE ATILCOXCA - PROGRAMA PRINCIPAL
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION RC(74),R(74),X(74),Y(74),X1(74),C(15)
      DIMENSION A(74),P(74),T(74),Y1(74),PM(74),P2(74)
C      ENTRADA DO NUMERO DE SECCOES "N"
      READ(2,1)N
1      FORMAT(G)
C      ENTRADA DAS DISCREPANCIAS "RC" E COMPRIMENTO
C      DAS SECCOES "R"
      READ(2,5)(RC(I),I=1,N)
      READ(2,5)(R(I),I=1,N)
5      FORMAT(46G)
      CALL VAX(RC,R,X,N)
      J=0
      J2=0
      DO 18 I=1,N
      IF(X(I))15,25,20
15     J=J+1
      J2=J2+1
      A(J)=-1.0
      X1(J)=X(J2)
      GO TO 10
20     J=J+1
      J2=J2+1
      A(J)=1.0
      X1(J)=X(J2)
10     Y(J)=ABS(X1(J))
      GO TO 18
25     J2=J2+1
18     CONTINUE
      CALL CRDE(Y,J)
      DO 71 I=1,J
71     Y1(I)=ABS(X1(I))
      NX=J-1
      NY=0
      DO 44 K=1,NX
      IF(Y(K)-Y(K+1))34,44,34
34     NY=NY+1
44     CONTINUE
      NY=NY+1
      I1=1
      J2=1
      DO 38 I=1,NY
      NN=0
      DO 40 K=1,J
      IF(Y(I1)-Y1(K))40,50,40
50     P(I2)=I2*A(K)
      I2=I2+1
      NN=NN+1
40     CONTINUE
      I1=I1+NN
38     CONTINUE
49     I3=1
      I4=1
      I5=0
      I7=0

```



```

DO 21 I=1,NY
N2=0
B=0.0
DO 16 K=1,J
IF(Y(14)-Y1(K))16,11,16
11  I5=15+1
    N2=N2+1
    FM(I5)=ABS(F(I5))
    B=B+FM(I5)
    C(N2)=A(K)
16  CONTINUE
    A1=B/N2
    I7=17+1
    T1=FLOAT(N2)
    T(I7)=T1
    J1=0
    DO 26 J6=13,15
    J1=J1+1
26  P2(I6)=A1*C(J1)
    I3=15+1
    I4=14+N2
21  CONTINUE
    S=0.0
    S1=0.0
    DO 75 I=1,J
    IF(F2(I))80,95,95
80  S=S+P2(I)
    GO 10 75
95  S1=S1+P2(I)
75  CONTINUE
    S=ABS(S)
    S1=ABS(S1)
    IF(S-S1)100,101,101
101 S=S1
100 CALL EZS(J,T,I1,S,ES,DS,US)
    ZS=-1.644
    WRITE(3,13)
13  FORMAT(20X,29(' '))
    WRITE(3,23)
23  FORMAT(21X,'ABS(X(I))',4X,'X(I)',4X,'POSTO',
    1/21X,'ORDENADOS',12X,'(RANK)')
    WRITE(3,13)
    DO 33 I=1,J
33  WRITE(3,43)Y(I),X1(I),F2(I)
43  FORMAT(23X,F5.3,5X,F6.3,3X,F5.1)
    WRITE(3,13)
    WRITE(3,53)N,S
53  FORMAT(/10X,'NUMERO DE SECCOES =',13,6X,'ES
    11A11STICA S =',F7.1)
    WRITE(3,63)ES,DS
63  FORMAT(/10X,'MEDIA E(S) =',F8.2,7X,'DESVIO
    1 PADRAO D(S) =',F7.2)
    WRITE(3,73)US,ZS
73  FORMAT(/10X,'ESTADISTICA US =',F7.3,4X,'VA
    1LOR CRITICO ZS =',F7.3)
    WRITE(3,83)
83  FORMAT(/10X,'HIPOTIESE H0: A DISTRIBUICAO E
    1 SIMETRICAMENTE',/23X,'DISTRIBUIDA EM REL

```

```

      1ACAO A ZERO')
C      TESTE DE HIPOTESE AO NIVEL DE 5%
      IF(US-ZS)27,37,37
27      WRITE(3,47)
47      FORMAT(/10X,'CONCLUSAO: REJEITAR A HIPOTESE
      1 HO')
      GO TO 67
37      WRITE(3,57)
57      FORMAT(/10X,'CONCLUSAO: NAO REJEITAR A HIPOTESE HO')

67      STOP
      END

C
C      CALCULO DA VARIÁVEL ALEATORIA Y(I)
      SUBROUTINE VAX(RC,R,X,I)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
      DIMENSION RC(1),R(1),X(1)
      DO 5 J=1,I
5      Y(J)=RC(J)/SQRT(R(J))
      RETURN
      END

C
C      ORDENACAO DOS Y(I)
      SUBROUTINE CRDE(Y,N)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
      DIMENSION Y(N)
      NN=N
5      NN=NN-1
      DO 10 J=1,NN
      K=J+1
      IF(Y(J)-Y(K))10,10,15
15      XL=Y(K)
      Y(K)=Y(J)
      Y(J)=XL
10      CONTINUE
      NN=NN-1
      IF(NN-1)20,20,5
20      RETURN
      END

C
C      CALCULO DA ESTATISTICA US
      SUBROUTINE EZS(N,T,I1,S,ES,DS,US)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
      DIMENSION T(I1)
C      CALCULO DE E(S)
      ES=(N*(N+1))/4.0
C      CALCULO DE V(S) E D(S)
      A=(ES*(2*N+1))/6.0
      B=0.0
      DO 5 I=1,I1
5      B=B+((T(I)**3)-I(I))/48.0
      VS=A-B
      DS=SQRT(VS)
C      CALCULO DE US
      US=(S-ES)/DS
      RETURN
      END

```

```

C      CURSO DE POS-GRADUACAO EM CIENCIAS GEOCESICAS
C      JAYR MENDES MARGUES
C      TESTE T PARA A MEDIA - PROGRAMA PRINCIPAL
      IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
      DIMENSION RC(74),R(74),X(74),I1(15)
C      ENTRADA DO NUMERO DE SECCES
      READ(2,1)N
1      FORMAT(G)
C      ENTRADA DAS DISCREPANCIAS "RC" E DOS
C      COMPRIMENTOS DAS SECCES "R"
      READ(2,5)(RC(I),I=1,N)
      READ(2,5)(R(I),I=1,N)
5      FORMAT(26G)
      CALL VAX(RC,R,X,N)
      CALL EST(X,N,XM,DP,T)
      CALL VTC(N,I1,TC,LC)
      LG=N-1
      TC1=-1.0*TC
      TC2=TC
      WRITE(3,15)
15     FORMAT(6X,56(' '))
      WRITE(3,20)
20     FORMAT(23X,'VARIAVEL ALEATORIA X(1)')
      WRITE(3,15)
30     WRITE(3,35)(X(I),I=1,N)
35     FORMAT(5X,7F8.3)
      WRITE(3,15)
      WRITE(3,40)N,LG
40     FORMAT(/10X,'NUMERO DE SECCES =',I3,3X,
1'GRAUS DE LIBERDADE =',I3)
      WRITE(3,45)XM,DP
45     FORMAT(/10X,'MEDIA XM =',F7.3,7X,'DESVIO
1 PADRAO DP =',F6.3)
      WRITE(3,50)TC1,TC2,T
50     FORMAT(/10X,'VALORES CRITICOS: TC1 =',F6.
1.2,2X,'E',2X,'TC2 =',F5.2,/,10X,'ESTATISTICA T =',F6.2)
      WRITE(3,55)
55     FORMAT(/10X,'HIPOTESE H0: MEDIA POPULACIONAL = ZERO')
C      TESTE DE HIPOTESE AO NIVEL DE SIGNIFICAN
C      CIA DE 5% - TESTE BILATERAL
      TM=ABS(T)
      IF(TM-TC)60,60,65
60     WRITE(3,70)
70     FORMAT(/10X,'CONCLUSAO: NAO REJEITAR A HIPOTESE H0')
      GO TO 80
65     WRITE(3,75)
75     FORMAT(/10X,'CONCLUSAO: REJEITAR A HIPOTESE H0')
80     STOP
      END

```

```

C      CALCULO DA VARIÁVEL ALFATCRIA X(I)
      SUBROUTINE VAX(RC,R,X,I)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
      DIMENSION RC(1),R(I),X(1)
      DO 5 J=1,I
5      X(J)=RC(J)/SQRT(R(J))
      RETURN
      END

C
C      CALCULO DA ESTATISTICA T
      SUBROUTINE EST(L,N,XM,DF,T)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
      DIMENSION X(N)
C      CALCULO DA MEDIA XM
      SX=0.0
      DO 5 I=1,N
5      SX=SX+X(I)
      XM=SX/N
C      CALCULO DO DESVIO PADRAO DF
      SY=0.0
      DO 10 I=1,N
10     SY=SY+(X(I)-XM)**2
      VS=SY/(N-1)
      DF=SQRT(VS)
C      CALCULO DA ESTATISTICA T
      R=FLOAT(N)
      T=XM/(DF/SQRT(R))
      RETURN
      END

C
C      DETERMINACAO DOS VALORES CRITICOS TC
      SUBROUTINE VTC(N,II,IC,LC)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
      DIMENSION T1(15)
      T1(15)=2.13
      T1(16)=2.12
      T1(17)=2.11
      T1(18)=2.10
      T1(19)=2.09
      T1(20)=2.09
      T1(21)=2.08
      T1(22)=2.07
      T1(23)=2.07
      T1(24)=2.06
      T1(25)=2.06
      T1(26)=2.06
      T1(27)=2.05
      T1(28)=2.05
      T1(29)=2.05
      LG=N-1
      IF(LG-29)5,5,10
5      TC=T1(LG)
      GO TO 70
10     IF(LG-39)15,15,20
15     TC=2.04

```

```
GO TO 70
20 IF(LG-49)25,25,30
25 TC=2.02
GO TO 70
30 IF(LG-59)35,35,40
35 TC=2.01
GO TO 70
40 IF(LG-69)45,45,50
45 TC=2.00
GO TO 70
50 IF(LG-99)55,55,60
55 TC=1.99
GO TO 70
60 TC=1.98
70 RETURN
END
```

```

C      CURSO DE POS-GRADUACAO EM CIEENCIAS GEODESICAS
C      JAIR MENDES MARGUES
C      TESTE P-LAMBDA DE PEARSON
C      PROGRAMA PRINCIPAL
      IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
      DIMENSION U(20),F(20),T(20),Z(20),V(20)
C      ENTRADA DO NUMERO DE LINHAS "N"
      READ(2,1)N
1      FORMAT(G)
C      ENTRADA DAS "N" ESTATISTICAS REFERENTES
C      A CADA UMA DAS LINHAS
      READ(2,5)(U(I),I=1,N)
5      FORMAT(20G)
      DO 80 I=1,N
80     V(I)=U(I)
      CALL NORMAL(U,F,T,N)
      CALL PLAB(F,Z,N,PL)
C      TESTE AO NIVEL DE SIGNIFICANCIA DE 5%
C      PARA 38 GRAUS DE LIBERDADE
      XC=53.40
      WRITE(3,10)
10     FORMAT(22X,'TESTE P-LAMBDA DE PEARSON')
      WRITE(3,15)
15     FORMAT(/20X,'APLICADO AO TESTE DE WILCOXON',/)
      WRITE(3,20)
20     FORMAT(18X,32(' '))
      WRITE(3,25)
25     FORMAT(19X,'LINHA',5X,'ZB',5X,'F(ZB)',5X,'Z')
      WRITE(3,20)
      DO 30 I=1,N
30     WRITE(3,35)I,V(I),F(I),Z(I)
35     FORMAT(20X,12.4X,F7.4,2X,F6.4,2X,F7.4)
      WRITE(3,20)
      WRITE(3,40)N,PL,XC
40     FORMAT(/19X,'NUMERO DE SECOES =',I3,/,19X,'ES
      TATISTICA PL =',F6.2,/,19X,'VALOR CRITICO X2
      1 =',F6.2)
      IF(PL-XC)45,45,50
45     WRITE(3,60)
60     FORMAT(/19X,'CONCLUSAO: NAO REJEITAR A HIPOTE
      SE H0')
      GO TO 55
50     WRITE(3,70)
70     FORMAT(/19X,'CONCLUSAO: REJEITAR A HIPOTIESE H
      0')
55     STOP
      END

C
C      CALCULO DA FUNCAO DISTRIBUICAO NORMAL
      SUBROUTINE NORMAL(X,Z,T,L)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
      DIMENSION X(L),Z(L),T(L)
      G=SQRT(1/(2*3.141593))
      F=0.23164190
      B1=0.31938153

```

```

      B2=-0.356563782
      B3=1.781477937
      B4=-1.821255978
      B5=1.330274429
      DO 5 I=1,L
      A=0.0
      IF (X(I)) 10,15,15
10    X(I)=ABS(X(I))
      A=1.0+A
15    T(I)=1/(1+P*(X(I)))
      Z(I)=0*EXP((-X(I)**2)/2)
      Z(I)=Z(I)+T(I)*(B1+T(I)*(B2+T(I)*(B3+T(I)
      1*(B4+T(I)*B5))))
      IF (A-1.0) 20,25,20
25    Z(I)=1.0-Z(I)
20    Z(I)=1.0-Z(I)+0.1E-6
5    CONTINUE
      RETURN
      END

C
C      CALCULO DA ESTATISTICA P=LAMBDA
      SUBROUTINE FLAB(A,Z,N,PL)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
      DIMENSION Z(N),A(N)
      DO 5 I=1,N
5    Z(I)=-2.0*ALOG(A(I))
      FL=0.0
      DO 10 I=1,N
10   PL=PL+Z(I)
      RETURN
      END

```

```

C      CURSO DE POS-GRADUACAO EM CIENCIAS GEODESICAS
C      JAIR MENDES MARQUES
C      TESTE DE KRUSKAL-WALLIS - PROGRAMA PRINCIPAL
      IMPLICI1 REAL*8(A-H,C-Z)
      DIMENSION RC1(74),RC2(74),RC3(74),RC4(74)
      DIMENSION RC5(74),RC6(74),RC7(74),RC8(74)
      DIMENSION RC9(74),RC10(74),RC11(74),RC12(74)
      DIMENSION RC13(74),RC14(74),RC15(74),RC16(74)
      DIMENSION RC17(74),RC18(74),RC19(74)
      DIMENSION R1(74),R2(74),R3(74),R4(74),R5(74)
      DIMENSION R6(74),R7(74),R8(74),R9(74),R10(74)
      DIMENSION R13(74),R14(74),R15(74),R16(74),R17(74)
      DIMENSION R18(74),R19(74),X13(74),X14(74),X15(74)
      DIMENSION X16(74),X17(74),X18(74),X19(74)
      DIMENSION P11(74),P12(74),X1(74),X2(74),X3(74)
      DIMENSION X4(74),X5(74),X6(74),X7(74),X8(74)
      DIMENSION X9(74),X10(74),X11(74),X12(74)
      DIMENSION Y(700),A(20),F(700),S(20),T(700)
C      ENTRADA DOS NUMEROS DE SECCES PARA CADA LINHA
      READ(2,1)NT,N1,N2,N3,N4,N5,N6,N7,N8,N9
      READ(2,1)N10,N11,N12,N13,N14,N15,N16,N17,N18,N19
1      FORMAT(10G)
C      ENTRADA DAS DISCREPANCIAS "RC" E COMPRIMENTO DAS
C      SECCES "R"
      READ(2,5)(RC1(I),I=1,N1)
      READ(2,5)(R1(I),I=1,N1)
5      FORMAT(26G)
      READ(2,6)(RC2(I),I=1,N2)
      READ(2,6)(P2(I),I=1,N2)
6      FORMAT(50G)
      READ(2,7)(RC3(I),I=1,N3)
      READ(2,7)(R3(I),I=1,N3)
7      FORMAT(26G)
      READ(2,8)(RC4(I),I=1,N4)
      READ(2,8)(R4(I),I=1,N4)
8      FORMAT(36G)
      READ(2,9)(RC5(I),I=1,N5)
      READ(2,9)(P5(I),I=1,N5)
9      FORMAT(20G)
      READ(2,10)(RC6(I),I=1,N6)
      READ(2,10)(R6(I),I=1,N6)
10     FORMAT(30G)
      READ(2,11)(RC7(I),I=1,N7)
      READ(2,11)(R7(I),I=1,N7)
11     FORMAT(74G)
      READ(2,12)(RC8(I),I=1,N8)
      READ(2,12)(R8(I),I=1,N8)
12     FORMAT(24G)
      READ(2,13)(RC9(I),I=1,N9)
      READ(2,13)(R9(I),I=1,N9)
13     FORMAT(32G)
      READ(2,14)(RC10(I),I=1,N10)
      READ(2,14)(R10(I),I=1,N10)
14     FORMAT(60G)
      READ(2,15)(RC11(I),I=1,N11)
      READ(2,15)(R11(I),I=1,N11)
15     FORMAT(25G)

```



```

      READ(2,16)(R012(I),I=1,N12)
      READ(2,16)(R12(I),I=1,N12)
16    FORMAT(21G)
      READ(2,17)(R013(I),I=1,N13)
      READ(2,17)(R13(I),I=1,N13)
17    FORMAT(23G)
      READ(2,18)(R014(I),I=1,N14)
      READ(2,18)(R14(I),I=1,N14)
18    FORMAT(16G)
      READ(2,19)(R015(I),I=1,N15)
      READ(2,19)(R15(I),I=1,N15)
19    FORMAT(33G)
      READ(2,20)(R016(I),I=1,N16)
      READ(2,22)(R16(I),I=1,N16)
20    FORMAT(28G)
      READ(2,21)(R017(I),I=1,N17)
      READ(2,21)(R17(I),I=1,N17)
21    FORMAT(46G)
      READ(2,22)(R018(I),I=1,N18)
      READ(2,22)(R18(I),I=1,N18)
22    FORMAT(31G)
      READ(2,23)(R019(I),I=1,N19)
      READ(2,23)(R19(I),I=1,N19)
23    FORMAT(47G)
      NL=19
      A(1)=R1
      N(2)=N2
      N(3)=N3
      N(4)=R4
      N(5)=N5
      N(6)=N6
      N(7)=N7
      N(8)=R8
      N(9)=N9
      N(10)=N10
      N(11)=N11
      N(12)=N12
      N(13)=N13
      N(14)=N14
      N(15)=N15
      N(16)=N16
      N(17)=N17
      N(18)=N18
      N(19)=N19
C     CALCULO DA VARIÁVEL ALEATORIA "X" PARA
C     CADA LINHA
      CALL VAX(R01,R1,X1,N1)
      CALL VAX(R02,R2,X2,N2)
      CALL VAX(R03,R3,X3,N3)
      CALL VAX(R04,R4,X4,N4)
      CALL VAX(R05,R5,X5,N5)
      CALL VAX(R06,R6,X6,N6)
      CALL VAX(R07,R7,X7,N7)
      CALL VAX(R08,R8,X8,N8)
      CALL VAX(R09,R9,X9,N9)
      CALL VAX(R010,R10,X10,N10)
      CALL VAX(R011,R11,X11,N11)

```

```

CALL VAX(R012,R12,X12,N12)
CALL VAX(R013,R13,X13,N13)
CALL VAX(R014,R14,X14,N14)
CALL VAX(R015,R15,X15,N15)
CALL VAX(R016,R16,X16,N16)
CALL VAX(R017,R17,X17,N17)
CALL VAX(R018,R18,X18,N18)
CALL VAX(R019,R19,X19,N19)
C      CONJUNTO TOTAL DE SECCIONES
DO 25 I=1,N1
25     Y(I)=X1(I)
DO 26 I=1,N2
      K1=N1+I
26     Y(K1)=X2(I)
DO 27 I=1,N3
      K2=K1+I
27     Y(K2)=X3(I)
DO 28 I=1,N4
      K3=K2+I
28     Y(K3)=X4(I)
DO 29 I=1,N5
      K4=K3+I
29     Y(K4)=X5(I)
DO 30 I=1,N6
      K5=K4+I
30     Y(K5)=X6(I)
DO 31 I=1,N7
      K6=K5+I
31     Y(K6)=X7(I)
DO 32 I=1,N8
      K7=K6+I
32     Y(K7)=X8(I)
DO 33 I=1,N9
      K8=K7+I
33     Y(K8)=X9(I)
DO 34 I=1,N10
      K9=K8+I
34     Y(K9)=X10(I)
DO 35 I=1,N11
      K10=K9+I
35     Y(K10)=X11(I)
DO 36 I=1,N12
      K11=K10+I
36     Y(K11)=X12(I)
DO 37 I=1,N13
      K12=K11+I
37     Y(K12)=X13(I)
DO 38 I=1,N14
      K13=K12+I
38     Y(K13)=X14(I)
DO 39 I=1,N15
      K14=K13+I
39     Y(K14)=X15(I)
DO 40 I=1,N16
      K15=K14+I
40     Y(K15)=X16(I)
DO 41 I=1,N17

```

```

      K16=K15+I
41      Y(K16)=X17(I)
      DO 42 I=1,N18
      K17=K16+I
42      Y(K17)=X18(I)
      DO 43 I=1,N19
      K18=K17+I
43      Y(K18)=X19(I)
C      ORDENACAO DOS Y(I)
      CALL ORD(Y,NT)
C      POSTO PARA CADA Y(I)
      DO 50 I=1,NT
50      P(I)=FLOAT(I)
      NX=NT-1
      NY=0
      DO 60 K=1,NX
      IF(Y(K)-Y(K+1))59,60,59
59      NY=NY+1
60      CONTINUE
      NY=NY+1
      I3=1
      I4=1
      I5=0
      I7=0
      DO 51 I=1,NY
      NN=0
      B=0.0
      DO 56 K=1,N1
      IF(Y(I4)-Y(K))56,57,56
57      I5=I5+1
      NN=NN+1
      B=B+P(I5)
56      CONTINUE
      A1=B/NN
      I7=I7+1
      T1=FLOAT(NN)
      T(I7)=T1
      DO 58 I6=I3,I5
58      P(I6)=A1
      I3=I5+1
      I4=I4+NN
51      CONTINUE
C      SOMA DOS POSTOS PARA CADA LINHA
      S(1)=0.0
      DO 61 I=1,N1
      DO 62 J=1,NT
      IF(X1(I)-Y(J))62,133,62
133      S(1)=S(1)+P(J)
      GO TO 61
62      CONTINUE
61      CONTINUE
      S(2)=0.0
      DO 63 I=1,N2
      DO 64 J=1,NT
      IF(X2(I)-Y(J))64,134,64
134      S(2)=S(2)+P(J)
      GO TO 63

```

```

64      CONTINUE
63      CONTINUE
        S(3)=0.2
        DO 67 I=1,N3
        DO 68 J=1,M1
        IF(X3(I)-Y(J))68,135,68
135     S(3)=S(3)+P(J)
        GO TO 67
66      CONTINUE
67      CONTINUE
        S(4)=0.0
        DO 69 I=1,N4
        DO 70 J=1,M1
        IF(X4(I)-Y(J))70,136,70
136     S(4)=S(4)+P(J)
        GO TO 69
70      CONTINUE
69      CONTINUE
        S(5)=0.0
        DO 71 I=1,N5
        DO 72 J=1,M1
        IF(X5(I)-Y(J))72,74,72
74      S(5)=S(5)+P(J)
        GO TO 71
72      CONTINUE
71      CONTINUE
        S(6)=0.0
        DO 75 I=1,N6
        DO 76 J=1,M1
        IF(X6(I)-Y(J))76,77,76
77      S(6)=S(6)+P(J)
        GO TO 75
76      CONTINUE
75      CONTINUE
        S(7)=0.0
        DO 78 I=1,N7
        DO 79 J=1,M1
        IF(X7(I)-Y(J))79,80,79
80      S(7)=S(7)+P(J)
        GO TO 78
79      CONTINUE
78      CONTINUE
        S(8)=0.0
        DO 81 I=1,N8
        DO 82 J=1,M1
        IF(X8(I)-Y(J))82,83,82
83      S(8)=S(8)+P(J)
        GO TO 81
82      CONTINUE
81      CONTINUE
        S(9)=0.0
        DO 84 I=1,N9
        DO 85 J=1,M1
        IF(X9(I)-Y(J))85,86,85
86      S(9)=S(9)+P(J)
        GO TO 84
85      CONTINUE

```

```

84      CONTINUE
        S(10)=0.0
        DO 87 I=1,N10
          DO 88 J=1,NT
            IF(X10(I)-Y(J))88,89,88
89      S(10)=S(10)+F(J)
          GO TO 87
88      CONTINUE
87      CONTINUE
        S(11)=0.0
        DO 90 I=1,N11
          DO 91 J=1,NT
            IF(X11(I)-Y(J))91,92,91
92      S(11)=S(11)+F(J)
          GO TO 90
91      CONTINUE
90      CONTINUE
        S(12)=0.0
        DO 93 I=1,N12
          DO 94 J=1,NT
            IF(X12(I)-Y(J))94,95,94
95      S(12)=S(12)+F(J)
          GO TO 93
94      CONTINUE
93      CONTINUE
        S(13)=0.0
        DO 120 I=1,N13
          DO 121 J=1,NT
            IF(X13(I)-Y(J))121,122,121
122     S(13)=S(13)+F(J)
          GO TO 120
121     CONTINUE
120     CONTINUE
        S(14)=0.0
        DO 140 I=1,N14
          DO 141 J=1,NT
            IF(X14(I)-Y(J))141,142,141
142     S(14)=S(14)+F(J)
          GO TO 140
141     CONTINUE
140     CONTINUE
        S(15)=0.0
        DO 143 I=1,N15
          DO 144 J=1,NT
            IF(X15(I)-Y(J))144,145,144
145     S(15)=S(15)+F(J)
          GO TO 143
144     CONTINUE
143     CONTINUE
        S(16)=0.0
        DO 146 I=1,N16
          DO 147 J=1,NT
            IF(X16(I)-Y(J))147,148,147
148     S(16)=S(16)+F(J)
          GO TO 146
147     CONTINUE
146     CONTINUE

```

```

S(17)=0.0
DO 149 I=1,N17
DO 150 J=1,NT
IF(X17(I)-Y(J))150,151,150
151 S(17)=S(17)+F(J)
GO TO 149
150 CONTINUE
149 CONTINUE
S(18)=0.0
DO 152 I=1,N18
DO 153 J=1,NT
IF(X18(I)-Y(J))153,154,153
154 S(18)=S(18)+F(J)
GO TO 152
153 CONTINUE
152 CONTINUE
S(19)=0.0
DO 155 I=1,N19
DO 156 J=1,NT
IF(X19(I)-Y(J))156,157,156
157 S(19)=S(19)+F(J)
GO TO 155
156 CONTINUE
155 CONTINUE
C
CALCULO DA ESTATISTICA F
C1=12.0/(NT*(NT+1))
C2=0.0
DO 98 I=1,N1
98 C2=C2+((S(1))*2)/(W(1))
C3=3.0*(NT+1)
C4=C1*C2-C3
C5=0.0
DO 99 I=1,N1
99 C5=C5+(T(1))*3-T(T)
C6=1.0-C5/(NT*3-NT)
XB=C4/C6
XC=28.87
LG=NL-1
WRITE(3,100)
100 FORMAT(6X,56(' '))
WRITE(3,101)
101 FORMAT(23X,'VARIÁVEL ALEATORIA: X(1)')
WRITE(3,102)
WRITE(3,102)(Y(I),I=1,NT)
102 FORMAT(5X,7F8.3)
WRITE(3,103)
WRITE(3,103)
103 FORMAT(/)
WRITE(3,104)
WRITE(3,104)
104- FORMAT(28X,'FISICS')
WRITE(3,105)
WRITE(3,105)(F(I),I=1,NT)
105 FORMAT(5X,7F8.1)
WRITE(3,106)
WRITE(3,106)
WRITE(3,106)

```

```

106   FORMAT(20X,28(' '))
      WRITE(3,107)
107   FORMAT(21X,'LINHA',2X,'NUMERO DE',2X,'SO
      1MA DCS',/29X,'SECCES',5X,'FCSTCS')
      WRITE(3,106)
      DO 108 I=1,19
108   *WRITE(3,109)I,N(I),S(I)
109   FORMAT(23X,12,5X,13,6X,F8.1)
      WRITE(3,106)
      WRITE(3,110)XH,XC,LG
110   FORMAT(/21X,'ESTADISTICA E =',F6.2,//21
      1X,'VALOR CRITICO =',F6.2,//21X,'GRAUS
      1DE LIBERDADE GL =',13)
      WRITE(3,106)NL,NT
110   FORMAT(/21X,'NUMERO DE LINHAS =',13,//
      121X,'NUMERO TOTAL DE SECCES =',14)
C     TESTE AO NIVEL DE SIGNIFICANCIA DE 5%
C     PARA 11 GRAUS DE LIBERDADE
      IF(XH-XC)111,111,112
111   WRITE(3,113)
113   FORMAT(/21X,'CONCLUSAO: NAO REJEITAR A'
      1/32X,'HIPOTESE H0')
      GO TO 115
112   WRITE(3,114)
114   FORMAT(/21X,'CONCLUSAO: REJEITAR A',
      1/32X,'HIPOTESE H0')
115   STOP
      END

C
C     CALCULO DA VARIÁVEL ALEATORIA X(I)
      SUBROUTINE VAX(RC,R,X,I)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
      DIMENSION RC(1),R(J),X(1)
      DO 5 J=1,I
5     X(J)=RC(J)/SQRT(R(J))
      RETURN
      END

C
C     ORDENACAO DOS X(I)
      SUBROUTINE CRD(Y,N)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
      DIMENSION Y(N)

      NG=N
      NJ=NN-1
      DO 10 J=1,NJ
      K=J+1
      IF(Y(J)-Y(K))10,10,15
15     XL=Y(K)
      Y(K)=Y(J)
      Y(J)=XL
10     CONTINUE
      NN=NN-1
      IF(NN-1)20,20,5
20     RETURN
      END

```

```

C      CURSO DE POS-GRADUACAO EM CIENCIAS GEODESICAS
C      JAIR MENDES MARGUES
C      TESIE DE BARILEIT - PROGRAMA PRINCIPAL
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      DIMENSION RC1(74),RC2(74),RC3(74),RC4(74)
      DIMENSION RC5(74),RC6(74),RC7(74),RC8(74)
      DIMENSION RC9(74),RC10(74),RC11(74),RC12(74)
      DIMENSION R1(74),R2(74),R3(74),R4(74),R5(74)
      DIMENSION R6(74),R7(74),R8(74),R9(74),R10(74)
      DIMENSION RC13(74),RC14(74),RC15(74),RC16(74)
      DIMENSION RC17(74),RC18(74),RC19(74),R13(74),R14(74)
      DIMENSION R11(74),R12(74),X1(74),X2(74),X3(74)
      DIMENSION R15(74),R16(74),R17(74),R18(74),R19(74)
      DIMENSION X4(74),X5(74),X6(74),X7(74),X8(74)
      DIMENSION X9(74),X10(74),X11(74),X12(74)
      DIMENSION X13(74),X14(74),X15(74),X16(74),X17(74)
      DIMENSION X18(74),X19(74),N(20),S(20),N1(20)
C      ENTRADA DOS NUMEROS DE SECCOES PARA CADA LINHA
      READ(2,1)NL,N1,N2,N3,N4,N5,N6,N7,N8,N9
      READ(2,1)N10,N11,N12,N13,N14,N15,N16,N17,N18,N19
1      FORMAT(20G)
C      ENTRADA DAS DISCREPANCIAS "RC" E COMPRIMENTO DAS
C      SECCOES "R" PARA CADA LINHA
      READ(2,5)(RC1(I),I=1,N1)
      READ(2,5)(R1(I),I=1,N1)
5      FORMAT(26G)
      READ(2,6)(RC2(I),I=1,N2)
      READ(2,6)(R2(I),I=1,N2)
6      FORMAT(50G)
      READ(2,7)(RC3(I),I=1,N3)
      READ(2,7)(R3(I),I=1,N3)
7      FORMAT(26G)
      READ(2,8)(RC4(I),I=1,N4)
      READ(2,8)(R4(I),I=1,N4)
8      FORMAT(36G)
      READ(2,9)(RC5(I),I=1,N5)
      READ(2,9)(R5(I),I=1,N5)
9      FORMAT(20G)
      READ(2,10)(RC6(I),I=1,N6)
      READ(2,10)(R6(I),I=1,N6)
10     FORMAT(30G)
      READ(2,11)(RC7(I),I=1,N7)
      READ(2,11)(R7(I),I=1,N7)
11     FORMAT(74G)
      READ(2,12)(RC8(I),I=1,N8)
      READ(2,12)(R8(I),I=1,N8)
12     FORMAT(24G)
      READ(2,13)(RC9(I),I=1,N9)
      READ(2,13)(R9(I),I=1,N9)
13     FORMAT(32G)
      READ(2,14)(RC10(I),I=1,N10)
      READ(2,14)(R10(I),I=1,N10)
14     FORMAT(60G)
      READ(2,15)(RC11(I),I=1,N11)
      READ(2,15)(R11(I),I=1,N11)
15     FORMAT(25G)
      READ(2,16)(RC12(I),I=1,N12)
      READ(2,16)(R12(I),I=1,N12)

```



```

16      FORMAT(21G)
      READ(2,101)(R013(I),I=1,N13)
      READ(2,101)(R13(I),I=1,N13)
101     FORMAT(23G)
      READ(2,102)(R014(I),I=1,N14)
      READ(2,102)(R14(I),I=1,N14)
102     FORMAT(16G)
      READ(2,103)(R015(I),I=1,N15)
      READ(2,103)(R15(I),I=1,N15)
103     FORMAT(33G)
      READ(2,104)(R016(I),I=1,N16)
      READ(2,104)(R16(I),I=1,N16)
104     FORMAT(28G)
      READ(2,105)(R017(I),I=1,N17)
      READ(2,105)(R17(I),I=1,N17)
105     FORMAT(46G)
      READ(2,106)(R018(I),I=1,N18)
      READ(2,106)(R18(I),I=1,N18)
106     FORMAT(31G)
      READ(2,107)(R019(I),I=1,N19)
      READ(2,107)(R19(I),I=1,N19)
107     FORMAT(47G)
      N(1)=N1
      N(2)=N2
      N(3)=N3
      N(4)=N4
      N(5)=N5
      N(6)=N6
      N(7)=N7
      N(8)=N8
      N(9)=N9
      N(10)=N10
      N(11)=N11
      N(12)=N12
      N(13)=N13
      N(14)=N14
      N(15)=N15
      N(16)=N16
      N(17)=N17
      N(18)=N18
      N(19)=N19
      NT=0
      DO 18 I=1,NL
18      NT=NT+N(I)
C      CALCULO DA VARIÁVEL ALFABETICA "X" PARA
C      CADA LINHA
      CALL VAX(R01,R1,X1,N1)
      CALL VAX(R02,R2,X2,N2)
      CALL VAX(R03,R3,X3,N3)
      CALL VAX(R04,R4,X4,N4)
      CALL VAX(R05,R5,X5,N5)
      CALL VAX(R06,R6,X6,N6)
      CALL VAX(R07,R7,X7,N7)
      CALL VAX(R08,R8,X8,N8)
      CALL VAX(R09,R9,X9,N9)
      CALL VAX(R010,R10,X10,N10)

```

```

CALL VAX(R011,R11,X11,N11)
CALL VAX(R012,R12,X12,N12)
CALL VAX(R013,R13,X13,N13)
CALL VAX(R014,R14,X14,N14)
CALL VAX(R015,R15,X15,N15)
CALL VAX(R016,R16,X16,N16)
CALL VAX(R017,R17,X17,N17)
CALL VAX(R018,R18,X18,N18)
CALL VAX(R019,R19,X19,N19)
C  CALCULO DA VARIANCIA PARA CADA LINHA
CALL VAR(X1,N1,S1)
CALL VAR(X2,N2,S2)

CALL VAR(X3,N3,S3)
CALL VAR(X4,N4,S4)
CALL VAR(X5,N5,S5)
CALL VAR(X6,N6,S6)
CALL VAR(X7,N7,S7)
CALL VAR(X8,N8,S8)
CALL VAR(X9,N9,S9)
CALL VAR(X10,N10,S10)
CALL VAR(X11,N11,S11)
CALL VAR(X12,N12,S12)
CALL VAR(X13,N13,S13)
CALL VAR(X14,N14,S14)
CALL VAR(X15,N15,S15)
CALL VAR(X16,N16,S16)
CALL VAR(X17,N17,S17)
CALL VAR(X18,N18,S18)
CALL VAR(X19,N19,S19)
S(1)=S1
S(2)=S2
S(3)=S3
S(4)=S4
S(5)=S5
S(6)=S6
S(7)=S7
S(8)=S8
S(9)=S9
S(10)=S10
S(11)=S11
S(12)=S12
S(13)=S13
S(14)=S14
S(15)=S15
S(16)=S16
S(17)=S17
S(18)=S18
S(19)=S19
NU=NT-NL
C  CALCULO DA VARIANCIA TOTAL
SS=0.0
DO 25 I=1,NL
25  SS=SS+((N(I)-1)*(S(I))) / NU
C  CALCULO DA ESTATISTICA B
A1=NU*ALOG(SS)
A2=0.0
DO 30 I=1,NL

```

```

30      A2=A2+((N(I)-1)*ALOG(S(I)))
      A=A1-A2
      C1=0.0
      DO 35 I=1,NL
35      C1=C1+(1.0/(N(I)-1))
      C=1.0+((C1-(1.0/NU))/(3.0*(NL-1)))
      B=A/C
      XC=28.87
      WRITE(3,40)
40      FORMAT(/26X,'TESTE DE BARTLETT',/)
      WRITE(3,45)
45      FORMAT(16X,37(' '))
      WRITE(3,50)
50      FORMAT(17X,'LINHA',1X,'NUMERO DE',1X,
1' GRAUS DE',2X,'VARIANCIA',/25X,'SEC
10ES',2X,'LIBERDADE')
      WRITE(3,45)
      DO 52 I=1,NL
52      N1(I)=N(I)-1
      DO 55 I=1,NL
55      WRITE(3,60)I,N(I),N1(I),S(I)
60      FORMAT(18X,12,6X,12,8X,12,6X,F6.3)
      WRITE(3,45)
      WRITE(3,65)NL,N1
65      FORMAT(/16X,'NUMERO DE LINHAS NL =',
113,/,16X,'NUMERO DE SECCES =',14)
      WRITE(3,70)B,XC
70      FORMAT(/16X,'ESTATISTICA B =',F6.2,/,
116X,'VALOR CRITICO XC =',F6.2)
C      TESTE AO NIVEL DE SIGNIFICANCIA DE 5%
C      PARA 11 GRAUS DE LIBERDADE
      IF(B=XC)75,75,85
75      WRITE(3,80)
80      FORMAT(/16X,'CONCLUSAO: NAO REJEITAR A',
1/27X,'HIPOTESE H0')
      GO TO 95
85      WRITE(3,90)
90      FORMAT(/16X,'CONCLUSAO: REJEITAR A',/,
127X,'HIPOTESE H0')
95      STOP
      END

C
C      CALCULO DA VARIÁVEL ALEATORIA X(I)
      SUBROUTINE VAX(RC,R,X,I)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
      DIMENSION RC(1),R(1),X(1)
      DO 5 J=1,I
5      X(J)=RC(J)/SORT(R(J))
      RETURN
      END

C
C      CALCULO DA VARIANCIA PARA CADA LINHA
      SUBROUTINE VAR(X,N,S2)
      IMPLICIT REAL*8(A-H,C-Z)
      DIMENSION X(N)
      SM=0.0
      DO 5 I=1,N

```

```
5      SM=SM+X(I)
      XM=SM/N
      S2=0.0
      DO 10 I=1,N
10     S2=S2+((X(I)-XM)**2)/(N-1)
      RETURN
      END
```

## NOTAS DE REFERÊNCIAS

|<sup>01</sup>| GEMAEL, C. Ajustamento de observações geodésicas; noções de estatística. Curitiba, UFPr, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1975. p.8

|<sup>02</sup>| WINE, R.L. Statistics for scientists and engineers. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1964. p.155.

|<sup>03</sup>| Ibid., p.231.

|<sup>04</sup>| Ibid., p.250.

|<sup>05</sup>| Ibid., p.292-293.

|<sup>06</sup>| Ibid., p.294-295.

|<sup>07</sup>| FISZ, M. Probability theory and mathematical statistics. New York, John Wiley, 1963. p.484-485.

|<sup>08</sup>| Ibid., p.474.

|<sup>09</sup>| WINE, p.264.

|<sup>10</sup>| Ibid., p.266-269.

|<sup>11</sup>| Ibid., p.299-303.

|<sup>12</sup>| FISZ, p.524-525.

|<sup>13</sup>| WINE, p.615.

|<sup>14</sup>| SIEGEL, S. Nonparametric statistics; for the behavioral sciences. New York, McGraw-Hill, 1956. p.283-284.

|<sup>15</sup>| SWED, F.S. & EISENHART, C. Tables for testing randomness of grouping in a sequence of alternatives. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 14:70-87, 1943..

|<sup>16</sup>| SIEGEL, p.62.

|<sup>17</sup>| VON NEUMANN, J. Distribution of the ratio of the mean square successive difference to the variance. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 12:62, 1941.

|<sup>18</sup>| CHERNOFF, H. & LEHMANN, E.L. The use of maximum likelihood estimates in  $\chi^2$  tests for goodness of fit. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 25:579-80, 1954.

|<sup>19</sup>| GOMIDE, F.L. & KAVISKI, E. Poder de testes de adequação de ajuste: uma investigação experimental. In SIMPÓSIO BRASILEIRO DE HIDROLOGIA E RECURSOS HÍDRICOS, 4., Fortaleza, 1981. Anais. São Paulo, Associação Brasileira de Hidrologia e Recursos Hídricos, 1981. v.1, p.553.

|<sup>20</sup>| BIRBAUM, Z.W. Numerical tabulation of the distribution of Kolmogorov's statistics for finite sample size. Journal of the American Statistical Association, Washington, 47:428-430, 1952.

|<sup>21</sup>| SIEGEL, p.282.

|<sup>22</sup>| MASSEY, F.J. The Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit. Journal of the American Statistical Association, Washington, 46:70, 1951.

|<sup>23</sup>| FISZ, p.395-405.

|<sup>24</sup>| CHIARINI, A. & PIERI, L. Statistical analysis of discrepancies in high precision levelling. Bulletin Géodésique, Paris, (99):10, mars 1971.

|<sup>25</sup>| PEARSON, K. On a new method of determining "goodness of fit". Biometrika, Blacksburg, 26:425-27, 1934.

|<sup>26</sup>| CHIARINI, p.12.

|<sup>27</sup>| BJERHAMMAR, A. Theory of errors and generalized matrix inverses. Amsterdam, Elsevier, 1973. p.86-90, 193-198.

|<sup>28</sup>| CHIARINI, p.5-57.

|<sup>29</sup>| MERCHANT, R. & JONES, L. Resultats de recherches dans le domaine de l'étude statistique des erreurs de nivellement. Bulletin Géodésique, Paris, (94):365-80, décembre 1969.

|<sup>30</sup>| REMMER, O. Levelling errors in statu nascendi. Meddelelse. Geodaetisk Institut. København, (51):7-49, 1975.

|<sup>31</sup>| SHEKURAH, G.K. Analysis of remanent systematic error effects on circuit closures in geodetic spirit levelling. Bulletin Géodésique, Paris, (95):71-85, mars 1970.

|<sup>32</sup>| WASSEF, A.M. Note on the application of mathematical statistics to the analysis of levelling errors. Bulletin Géodésique, Paris (52):19-26, juin 1959.

|<sup>33</sup>| WASSEF, A. M. On the search for reliable criteria of the accuracy of precise levelling based on statistical considerations of the discrepancies. Bulletin Géodésique, Paris, (112):149-64, juin 1974.

|<sup>34</sup>| WASSEF, A.M. Statistical analysis of discrepancies in levelling with applications to the first-order levelling of the Nile delta. Bulletin Géodésique, Paris, (36):29-46, juin 1955.

|<sup>35</sup>| WASSEF, A. M. & MESSIH, F.Z.A. On the statistical distribution of levelling errors. Bulletin Géodésique, Paris, (56):201-10, juin 1960.

|<sup>36</sup>| WASSEF, A. M. & MESSIH, F.Z.A. Study of the normality and homogeneity of levelling errors (sumary). Bulletin Géodésique, Paris, (52):27-36, juin 1959.

|<sup>37</sup>| VIGNAL, J. Nivellement de précision. Paris, Publications Techniques de L'Institut Géographique National, 1955. p.110.



|<sup>38</sup>| CHIARINI, p.6.

|<sup>39</sup>| Ibid., p.7.

|<sup>40</sup>| VON NEUMANN, p.367.

|<sup>41</sup>| GUMBEL, E.J. On the reliability of the classical chi-square test. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 14:253-63, 1943 .

|<sup>42</sup>| MANN, H.B. & WALD, A. On the choice of the number of class intervals in the publication of the chi square test. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 13:306-17, 1942.

|<sup>43</sup>| CHERNOFF, P.579-580.

|<sup>44</sup>| CHIARINI, p.10.

|<sup>45</sup>| Ibid., p.6.

|<sup>46</sup>| Ibid., p.5.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

01. BIRBAUM, Z.W. Numerical tabulation of the distribution of Kolmogorov's statistics for finite sample size. Journal of the American Statistical Association, Washington, 47:425-41, 1952.
02. BJERHAMMAR, A. Theory of errors and generalized matrix inverses. Amsterdam, Elsevier, 1973. 420p.
03. CHERNOFF, H. & LEHMANN, E.L. The use of maximum likelihood estimates in  $\chi^2$  tests for goodness of fit. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 25:579-86, 1954.
04. CHIARINI, A. & PIERI, L. Statistical analysis of discrepancies in high precision levelling. Bulletin Géodésique, Paris, (99): 5-57, mars 1971.
05. FISZ, M. Probability theory and mathematical statistics. New York, John Wiley, 1963. 665p.
06. GEMAEL, C. Ajustamento de observações geodésicas: noções de estatística. Curitiba, UFPr, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, 1975. 55p.
07. GOMIDE, F.L. & KAVISKI, E. Poder de testes de adequação de ajuste: uma investigação experimental. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE HIDROLOGIA E RECURSOS HÍDRICOS, 4. , Fortaleza, 1981. Anais. São Paulo, Associação Brasileira de Hidrologia e Recursos Hídricos, 1981. v.1, p.551-568.
08. GUMBEL, E.J. On the reliability of the classical chi-square test. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 14: 253-63, 1943.
09. MANN, H.B. & WALD, A. On the choice of the number of class intervals in the application of the chi square test. Annals of Mathematical Statistics, Baltimore, 13:306-17, 1942.
10. MASSEY, F.J. The Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit. Journal of the American Statistical Association, Washington, 46:68-78, 1951.
11. MERCHANT, R. & JONES, L. Resultats de recherches dans le domaine de l'étude statistique des erreurs de nivellement. Bulletin Géodésique, Paris, (94): 365-80, décembre 1969.
12. PEARSON, K. On a new method of determining "goodness of fit". Biometrika, Blacksburg, 26:425-42, 1934.

13. REMMER, O. Levelling errors in statu nascendi.  
Meddelelse. Geodaetisk Institut. København, (51):7-49,  
1975.
14. SHEKURAH, G.K. Analysis of remanent systematic error  
effects on circuit closures in geodetic spirit levelling.  
Bulletin Géodésique, Paris, (95):71-85, mars 1970.
15. SIEGEL, S. Nonparametric statistics; for the behavioral  
sciences. New York, McGraw-Hill, 1956. 312p.
16. SWED, F.S. & EISENHART, C. Tables for testing randomness  
of grouping in a sequence of alternatives. Annals of  
Mathematical Statistics, Baltimore, 14:66-87, 1943.
17. VIGNAL, J. Nivellement de précision. Paris, Publications  
Techniques de L'Institut Géographique National, 1955.  
262p.
18. VON NEUMANN, J. Distribution of the ratio of the mean  
square successive difference to the variance. Annals  
of Mathematical Statistics, Baltimore, 12:367-95,  
1941.
19. WALD, A. & WOLFOWITZ, J. On a test whether two samples  
are from the same population. Annals of Mathematical  
Statistics, Baltimore, 11:147-62, 1940.
20. WASSEF, A.M. Note on the application of mathematical  
statistics to the analysis of levelling errors.  
Bulletin Géodésique, Paris, (52):19-26, juin 1959.
21. \_\_\_\_\_. On the search for reliable criteria of the  
accuracy of precise levelling based on statistical  
considerations of the discrepancies. Bulletin Géodésique,  
Paris, (112):149-64, juin 1974.
22. \_\_\_\_\_. Statistical analysis of discrepancies in levelling  
with applications to the first-order levelling of the  
Nile delta. Bulletin Géodésique, Paris, (36):29-46,  
juin 1955.
23. \_\_\_\_\_. & MESSIH, F.Z.A. On the statistical distribution  
of levelling errors. Bulletin Géodésique, Paris, (56):  
201-10, juin 1960.
24. \_\_\_\_\_. & MESSIH, F.Z.A. Study of the normality and  
homogeneity of levelling errors (summary). Bulletin  
Géodésique, Paris, (52):27-36, juin 1959.
25. WINE, R.L. Statistics for scientists and engineers.  
Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1964. 671p.

